Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Ugo Broggi

Sulla serie potenza di esponente intero e positivo di un'altra

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 8–10.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_8_0>

Sulla serie potenza di esponente intero e positivo di un'altra.

Nota di U. BROGGI (di Milano).

Sunto. *Si dà l'espressione del termine generale* A_n *della serie*

$$1 + A_1 + A_2 + \dots = (1 + a_1 + a_2 + \dots)^p.$$

dove p *è intero e positivo.*

Immaginiamo data una successione a_1, a_2, a_3, ... e, col CESÀRO, rappresentiamo con

$$\overset{h}{\underset{p}{S}} a_r$$

la somma di tutti i prodotti analoghi a $a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_h}$ essendo $r_1, r_2, \dots r_h$ numeri interi positivi uguali o disuguali aventi per somma p. In altri termini, poniamo

$$\overset{1}{\underset{p}{S}} a_r = a_p, \quad \overset{2}{\underset{p}{S}} a_r = a_1 a_{p-1} + a_2 a_{p-2} + \dots + a_{p-1} a_1,$$

$$\dots\dots \overset{p}{\underset{p}{S}} a_r = a_1{}^p$$

e conveniamo che

$$\underset{p}{\overset{h}{S}} a_r = 0$$

se $h > p$.

Ove si convenga di designare con $a_s \underset{p}{\overset{h}{S}} a_r$, $(s = 1, 2, \ldots, p)$, la somma di tutti i prodotti isobarici, di peso $p + s$, che si ottengono facendo seguire agli elementi dei monomi di cui consta $\underset{p}{\overset{h}{S}} a_r$ l'elemento a_s, trasformando cioè

$$a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_h} \quad \text{in} \quad a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_h} a_s$$

si ha evidentemente

$$\underset{p}{\overset{h}{S}} a_r = a_1 \underset{p-1}{\overset{h-1}{S}} a_r + a_2 \underset{p-2}{\overset{h-1}{S}} a_r + a_3 \underset{p-3}{\overset{h-1}{S}} a_r + \ldots + a_{p-h+1} \underset{h-1}{\overset{h-1}{S}} a_r. \tag{1}$$

Si può dedurre dalla (1), indipendentemente da ogni considerazione di calcolo combinatorio, che, se p è intero e positivo, e $1 + |a_1| + |a_2| + \ldots$ converge

$$(1 + a_1 + a_2 + \ldots)^p = 1 + pa_1 + \sum_{h=1}^{2} \binom{p}{h} \underset{2}{\overset{h}{S}} a_r + \sum_{h=1}^{3} \binom{p}{h} \underset{3}{\overset{h}{S}} a_r + \ldots \tag{2}$$

La (2) sussiste evidentemente per $p = 1$. Può dimostrarsi che essa vale per $p + 1$ ove valga per p.

Si ponga

$$(1 + a_1 + a_2 + \ldots)^p (1 + a_1 + a_2 + \ldots) = 1 + B_1 + B_2 + \ldots$$

e cioè

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{h=1}^{n} \binom{p}{h} \underset{n}{\overset{h}{S}} a_r + a_1 \sum_{h=1}^{n-1} \binom{p}{h} \underset{n-1}{\overset{h}{S}} a_r + a_2 \sum_{h=1}^{n-2} \binom{p}{h} \underset{n-2}{\overset{h}{S}} a_r + \ldots + a_n \\
&= a_n + \binom{p}{1} \underset{n}{\overset{1}{S}} a_r \\
&\quad + \binom{p}{2} \underset{n}{\overset{2}{S}} a_r + a_1 \binom{p}{1} \underset{n-1}{\overset{1}{S}} a_r + a_2 \binom{p}{1} \underset{n-2}{\overset{1}{S}} a_r + \ldots + a_{n-1} \binom{p}{1} \underset{1}{\overset{1}{S}} a_r \\
&\quad + \binom{p}{3} \underset{n}{\overset{3}{S}} a_r + a_1 \binom{p}{2} \underset{n-1}{\overset{2}{S}} a_r + a_2 \binom{p}{2} \underset{n-2}{\overset{2}{S}} a_r + \ldots + a_{n-2} \binom{p}{2} \underset{2}{\overset{2}{S}} a_r \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \binom{p}{n} \underset{n}{\overset{n}{S}} a_r + a_1 \binom{p}{n-1} \underset{n-1}{\overset{n-1}{S}} a_r \\
&= \sum_{h=1}^{n} \binom{p+1}{h} \underset{n}{\overset{h}{S}} a_r
\end{aligned}$$

poichè

$$\binom{p}{h}\overset{h}{\underset{n}{S}}a_r + a_1\binom{p}{h-1}\overset{h-1}{\underset{n-1}{S}}a_r + a_2\binom{p}{h-1}\overset{h-1}{\underset{n-2}{S}}a_r + \dots + a_{n-h+1}\binom{p}{h-1}\overset{h-1}{\underset{h-1}{S}}a_r$$
$$= \binom{p+1}{h}\overset{h}{\underset{n}{S}}a_r$$

come si deduce immediatamente da

$$\binom{p+1}{h} - \binom{p}{h} = \binom{p}{h-1}$$

e dalla (1).

Se $a_{q+1} = a_{q+2} = \dots = 0$, il peso del termine $a_{r_1}a_{r_2}\dots a_{r_h}$ non può essere maggiore di hp. Si ha pertanto

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_q)^p = 1 + \binom{p}{1}a_1 + \sum_{h=1}^{2}\binom{p}{h}\overset{h}{\underset{2}{S}}a_r + \sum_{h=1}^{3}\binom{p}{h}\overset{h}{\underset{3}{S}}a_r + \dots$$
$$+ \sum_{h=1}^{p}\binom{p}{h}\left[\overset{h}{\underset{p}{S}}a_r + \overset{h}{\underset{p+1}{S}}a_r + \dots + \overset{h}{\underset{pq}{S}}a_r\right]$$
$$= 1 + \binom{p}{1}\sum_{h=1}^{q}\left(\overset{1}{\underset{h}{S}}a_r\right) + \binom{p}{2}\sum_{h=2}^{2q}\left(\overset{2}{\underset{h}{S}}a_r\right) + \dots + \binom{p}{p}\sum_{h=p}^{pq}\left(\overset{p}{\underset{h}{S}}a_r\right)$$

e, se $a_2 = a_3 = \dots = 0$, $a_1 = a$, poichè tutte le somme si riducono al loro primo termine, $(1 + a)^p = 1 + \binom{p}{1}a + \binom{p}{2}a^2 + \dots + \binom{p}{p}a^p$.