
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BENIAMINO SEGRE

Sulla possibilità di generare una quadrica mediante due schiere proiettive di quadriche

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 11 (1932), n.1, p. 3–8.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_3_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_3_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

Sulla possibilità di generare una quadrica mediante due schiere proiettive di quadriche.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Si danno alcune proposizioni generali, da cui risulta la possibilità di generare una quadrica mediante due schiere proiettive di quadriche; fra le conseguenze che se ne traggono, son da rilevare quelle relative alle trasformazioni proiettive delle quadriche conservanti le linee di curvatura.*

1. Esistono in S_3 due schiere di quadriche, che segano su d'una data quadrica Q lo stesso sistema di quartiche di 1^a specie?

Per semplicità limiteremo il nostro studio a *schiere generali*; così denomineremo brevemente una schiera di quadriche, quando ammette un tetraedro autopolare (non degenero) ben determinato, e possiede quindi 4 distinte quadriche degeneri, il cui birapporto verrà detto *l'invariante proiettivo* della schiera.

Si vede subito allora, che, se esistono due schiere siffatte Γ e Γ' rispondenti alla questione postaci in principio, la corrispondenza definita fra esse associando quadriche che determinano su Q la stessa intersezione — ossia *formanti fascio* con Q — è algebrica e biunivoca, eppertanto proiettiva. In tale corrispondenza, alle 4 quadriche degeneri di Γ (ridotte, come luoghi, a coniche situate nei piani del relativo tetraedro autopolare) debbon manifestamente rispondere le 4 coniche degeneri di Γ' : ciò implica che le due schiere ammettano lo stesso tetraedro autopolare, ed invarianti proiettivi uguali; e che anche Q abbia quel tetraedro come autopolare.

2. Le quadriche dello spazio aventi un dato tetraedro autopolare T , formano — considerate una volta come luoghi ed una seconda volta come involuppi — due sistemi lineari ∞^3 . Riferiti proiettivamente tali sistemi a due spazi a tre dimensioni, che rispettivamente denominiamo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Z}$, si ottiene fra questi una *corrispondenza birazionale* associando punti dei due spazi che sieno immagini di una stessa quadrica, considerata una volta come luogo ed una volta come involuppo.

Le quadriche aventi T come tetraedro autopolare e che si riducono a conì, hanno per vertice uno dei 4 vertici di T , e si rappresentano in $\mathcal{S}$ coi punti situati sulle facce di un dato tetraedro $\mathcal{T}$ (le cui facce restan in tal guisa riferite ai vertici di T).

Dualmente si ha in Σ un tetraedro Θ (pure riferito a T), i punti delle cui facce rappresentano le coniche aventi T come tetraedro autopolare.

La suddetta trasformazione birazionale fra $\mathcal{S}$ e Σ , ha rispettivamente per fondamentali nei due spazi i vertici e le facce dei tetraedri $\mathcal{T}$ e Θ ; e precisamente, ai piani dell'un spazio rispondono nell'altro le superficie cubiche passanti doppiamente pei vertici del tetraedro relativo, ed alle rette del primo spazio le cubiche sghembe circoscritte a tale tetraedro. Una schiera Γ di quadriche avente T come tetraedro autopolare, si rappresenta in Σ con una retta e quindi in $\mathcal{S}$ con una cubica circoscritta al tetraedro $\mathcal{T}$; l'invariante proiettivo di Γ non è altro che il birapporto dei 4 punti (presi in un dato ordine) secondo cui quella retta sega le facce di Θ , od anche il birapporto dei 4 vertici di $\mathcal{T}$ considerati (nell'ordine corrispondente) sulla suddetta cubica sghemba: ecc. ecc.

Tutto ciò si prova senza difficoltà, mediante semplici considerazioni sintetiche od analitiche.

3. Approfittando della rappresentazione indicata al n. 2, la questione propostaci al n. 1 resta ricondotta a determinare (se esistono) in $\mathcal{S}$ due cubiche sghembe circoscritte a $\mathcal{T}$, riferibili proiettivamente fra loro, in guisa che le rette congiungenti le coppie di punti omologhi concorrano in uno stesso punto Q .

Si vede intanto che, se due cubiche siffatte esistono, il punto Q deve stare su entrambe: in caso contrario, infatti, le due curve non potrebbero avere che 3 punti a comune (mentre già sappiamo che ne hanno almeno 4), poichè *tre* è il numero dei punti in cui si appoggiano due cubiche distinte situate su d'uno stesso cono cubico (razionale) ⁽¹⁾.

Le due cubiche, dunque, oltre ai 4 vertici del tetraedro $\mathcal{T}$, debbon avere in comune un 5° punto Q , dal quale inoltre esse debbono venir proiettate secondo uno stesso cono quadrico. Affinchè quest'ultimo fatto sussista, occorre e basta che *una* retta uscente da Q ed appoggiata all'una cubica in un punto distinto

(1) Per provarlo, basta osservare che tutte le curve del terzo ordine situate su di un dato cono cubico razionale, posson ottenersi come intersezioni residue di questo, colle quadriche passanti per la sua generatrice doppia e per un'altra generatrice fissata ad arbitrio; due quadriche siffatte si segano ulteriormente secondo due rette incidenti, il cui piano determina precisamente sull'una e sull'altra delle due cubiche corrispondenti, i punti ad esse comuni.

dai vertici di $\mathcal{T}$, risulti pure appoggiata all'altra cubica; ed anche, all'uopo è necessario e sufficiente che i 4 vertici del tetraedro $\mathcal{T}$ abbiano, sulle due cubiche, uno stesso birapporto. Ritornando allo spazio delle quadriche, si può dire in conclusione che:

Affinchè due schiere generali di quadriche seghino su d'una data quadrica Q uno stesso sistema di quartiche di 1^a specie, è necessario e sufficiente che le due schiere contengano Q , ed ammettano lo stesso tetraedro autopolare ed invarianti proiettivi uguali; quest'ultima condizione può venir sostituita col fatto che in una schiera esista una quadrica non degenerare e distinta da Q , che seghi una quadrica analoga dell'altra schiera lungo una curva giacente su Q , poichè allora di quadriche siffatte ne esistono di conseguenza infinite.

In base alla precedente proposizione, la quadrica Q deve necessariamente esser priva di punti doppi; essa inoltre (contata doppiamente) appare il luogo delle curve intersezioni delle quadriche omologhe delle due schiere, riferite fra loro opportunamente — giusta il n. 1 — in modo proiettivo.

OSSERVAZIONE. — La suddetta proposizione vien in altri termini a significare, che le ∞^2 schiere di quadriche contenenti una data quadrica Q ed aventi un dato tetraedro autopolare, segnano su Q solo una *semplice infinità* di sistemi di linee, uno stesso sistema venendo determinato dalle ∞^1 schiere aventi lo stesso invariante proiettivo; ciò potrebbe anche venir stabilito in modo diretto, tenendo presente che i suddetti sistemi su Q son *sistemi doppi coniugati*.

4. I risultati conseguiti al n.º precedente mostrano che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sieno proiettivi i sistemi coniugati segnati su due quadriche (prive di punti doppi) Q e Q^ , da due schiere generali di quadriche Γ e Γ^* contenenti rispettivamente le Q , Q^* , è che le due schiere abbiano invarianti proiettivi uguali.*

Se infatti esiste una collineazione che trasporti Q^* in Q , mutando il sistema segnato sulla prima da Γ^* nel sistema segnato sulla seconda da Γ (per il che non è necessario che Γ^* si trasformi in Γ , ma — giusta il n. 3 — basta che una curva del primo sistema si muti in una curva dell'altro), la schiera Γ e la schiera Γ' omologa di Γ^* nella suddetta omografia sono nelle condizioni volute dal teorema del n. 3, eppertanto hanno invarianti proiettivi uguali; lo stesso si potrà dunque asserire di Γ e Γ^* .

Se viceversa si suppone che Γ e Γ^* abbiano lo stesso invariante proiettivo, una qualunque delle omografie che trasfor-

mano Q^* in Q , facendo corrispondere debitamente fra loro — nel modo più sotto indicato — i tetraedri autopolari delle due schiere, trasformerà il sistema coniugato segnato da Γ^* su Q^* nell' analogo sistema relativo a Q ; e precisamente, in base al n. 3, occorre e basta all'uopo che le facce di un tetraedro corrispondano a quelle dell'altro, in modo da indurre fra le quaterne (in esse contenute) di coniche delle due schiere, un riferimento tale ch'esse risultino a birapporti uguali. Ciò è certo possibile per la supposta uguaglianza degli invarianti proiettivi delle due schiere; ed anzi è sempre possibile in 4 modi diversi, che aumentano ad 8 o a 12 se le due quaterne — o, come anche brevemente diremo, le due schiere — risultano armoniche od equianarmoniche.

Tenuto conto del fatto che, qualora si sia fissato il modo di corrispondersi dei due tetraedri autopolari, si hanno sempre 8 diverse omografie che mutano Q^* in Q associando nel modo voluto le facce di quei tetraedri, si può dire che *le omografie cercate sono generalmente in tutto in numero di 32*, elevandosi il numero (e precisamente raddoppiando o triplicando) solo nel caso armonico od equianarmonico. Risulta pure che:

Una schiera generale di quadriche dello spazio ordinario, determina su d'una qualunque sua quadrica non degenerare un doppio sistema coniugato di quartiche ellittiche, il quale vien trasformato in sè da un gruppo di 32 collineazioni; se la schiera è armonica od equianarmonica, si ha un gruppo più ampio, rispettivamente di 64 o di 96 collineazioni.

5. Come applicazione metrica di quanto è stato detto al n.º precedente, riferiamoci ad una quadrica Q a centro non di rotazione, che sia ad esempio rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dall'equazione

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

(con a, b, c numeri reali diversi fra loro e da zero).

La Q determina notoriamente una schiera Γ di quadriche omofocali, rappresentate — al variare del parametro λ — dall'equazione

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1;$$

e la schiera segna sulla quadrica Q il sistema delle sue linee di curvatura.

Γ è una schiera generale, nel senso precisato al n. 1; effettivamente, il suo tetraedro autopolare ha per facce i piani x, y, z

ed il piano improprio, sui quali rispettivamente per λ uguale ad a, b, c, ∞ si hanno le 4 coniche della schiera Γ . Il suo invariante proiettivo (dato l'ordine suddetto in cui consideriamo le facce del tetraedro autopolare) vale

$$(a \ b \ c \ \infty) = \frac{a-c}{b-c}.$$

Ciò premesso, in base al n. 4 risulta agevolmente che:

Affinchè due quadriche a centro non di rotazione:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^*} + \frac{y^2}{b^*} + \frac{z^2}{c^*} = 1,$$

si possano trasformare l'una nell'altra mediante un'omografia, in modo che le linee di curvatura si corrispondano (e basta che vi sia una linea di curvatura dell'una che si muti in una linea di curvatura dell'altra, per concludere che le linee di curvatura si corrispondono), è necessario e sufficiente che sussista una relazione del tipo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^* & b^* & c^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$$

Questa equivale alla possibilità di scrivere le a^*, b^*, c^* sotto la forma

$$a^* = ma + n, \quad b^* = mb + n, \quad c^* = mc + n,$$

ossia il caso suddetto si presenta sempre e solo che *una* (e quindi pure *ciascuna*) delle due quadriche risulti simile ad una quadrica omofocale all'altra. In tale ipotesi si hanno 32 omografie che mutano l'una quadrica nell'altra conservando le linee di curvatura, e 64 se p. es. è

$$c = \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{e quindi pure} \quad c^* = \frac{1}{2}(a^* + b^*) \quad (3).$$

(2) Questa equazione comporta una certa indeterminatezza, poichè può darsi ovviamente che nella 1^a orizzontale si debbano permutare le lettere. Detta equazione trovasi già, con una lieve imprecisione, nella Nota di R. STEFANELLI, *Intorno alle coppie di quadriche proiettive a centro, le cui linee di curvatura si corrispondono*, « Giornale di Matematiche », t. 68 (1930), p. 185; in questa Nota la proposizione del testo — da cui si sopprime l'inciso entro parentesi — vien stabilita mediante calcoli, piuttosto laboriosi e non del tutto esaurienti, fondati sulla considerazione dell'equazione differenziale delle linee di curvatura.

(3) In particolare si ha un gruppo di altrettante omografie, che trasformano in sé la Q conservando le linee di curvatura.

Nei due casi, rispettivamente, fra quelle omografie si hanno 8 o 16 affinità; le rimanenti omografie hanno in ciascuno spazio per piano limite uno dei piani principali della quadrica relativa, ed associano fra loro opportunamente i piani principali rimanenti.

Non stiamo a scrivere le equazioni delle suddette omografie, poichè — basandosi sul n. 4 — ciò non offre più alcuna difficoltà. Lasciando dunque al lettore di completare la discussione, ci limitiamo a rilevare che non sempre quelle omografie sono *reali* ⁽⁴⁾; e che una delle affinità (reali) secondo cui — a norma di quanto precede — si posson mutare l'una nell'altra due quadriche a centro omofocali della stessa specie, in guisa che le linee di curvatura si corrispondano, è la ben nota *affinità di IVORY*.

OSSERVAZIONE. — Tutto ciò che precede si lascia assai facilmente estendere agli iperspazi: in S_n dovranno considerarsi $n-2$ *invarianti proiettivi* di una schiera di quadriche, ecc. ecc. ⁽⁵⁾.

(4) Le suddette 32 omografie risultano *tutte* reali, se e soltanto se entrambe le quadriche son *iperboloidi ad una falda*.

(5) Nel piano (ossia per $n=2$) una schiera di coniche *non ha* invarianti proiettivi; ed in corrispondenza si constata che due diverse schiere di coniche collo stesso triangolo autopolare, determinano sempre sulla conica-luogo comune *la medesima* g_4 .