Recensioni

* T. Levi-Civita: Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa (Giulio Krall)
* Pietro Burgatti: Teoria matematica dell'Elasticità (Francesco Sbrana)
* Enciclopedia delle Matematiche Elementari a cura di L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli; Voi 1°, parte 2ª (Giovanni Sansone)
* G. A. Campbell e R. M. Foster: Fourier Integrals for pratical Applications (C. Rimini)
* L. Bieberbach: Projektive Geometrie
* Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano, Tomo V
* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
* Federigo Enriques: Leçons de Geometrie projective
* Mineo Chini: Lezioni di Analisi Matematica
* Herzberger: Strahlenoptik

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 39–56.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_39_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

RECENSIONI

T. LEVI-CIVITA: *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa.* Lezioni raccolte dal dott. G. LAMPARIELLO. Bologna, Zanichelli. 1931-IX. Lire 15.

La teoria delle caratteristiche, di cui dall'HUGONIOT e successivamente dall'HADAMARD fu posta in evidenza l'importanza fondamentale nello studio delle onde di discontinuità, trova nel presente volumetto una esposizione concisa, ma pur completa e sistematica, ch'era da tempo assai desiderata.

Con precisione e misura l'A. inquadra, in schemi semplici e ben delineati, le nozioni fondamentali della teoria e ne rileva con limpidezza la parte sostanziale.

Non solo, ma riagita l'interesse per lo studio delle propagazioni ondose, ne riaffina e riordina i metodi atti a perseguirlo e, spingendosi sino alle soglie delle nuove meccaniche, schiude un campo di ricerche che potrà esser forse fecondo di risultati.

L'A. prende le mosse (§ 1) dai classici teoremi di esistenza secondo CAUCHY (e le specificazioni della KOWALEVSKY) degli integrali di un sistema *normale* di equazioni alle derivate parziali.

Introdotto allora, con utile immagine geometrica, lo spazio euclideo delle $n+1$ variabili indipendenti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, si comincia a considerare l'iperpiano $\varpi =$ cost. come *varietà* (ad n dimensioni) portante i *dati iniziali*, in corrispondenza all'arbitrarietà dei quali vien affermata l'univoca esistenza delle incognite funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Con ciò sorge spontanea la questione, che prelude alla scoperta delle *superficie caratteristiche*, sulla possibilità o meno di sostituire l'iperpiano ϖ con una ipersuperficie σ generica

$$z(x_0, x_1, \ldots, x_n) = z_0.$$

Riportando il problema a quello equivalente di stabilire se per rispetto ad un cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} x_0, & x_1, \ldots, & x_n \\ z_0, & z_1, \ldots, & z_n \end{pmatrix}$$

tale da trasformare $\bar{\omega}$ nella σ, si mantiene inalterato il carattere *normale* (rispetto a z) del sistema, l'A. si rivolge in modo specifico ai sistemi differenziali del I° e II° ordine.

Precisamente (§ 2) a sistemi del tipo

$$(1) \qquad E_\mu = \sum_1^m {}_\nu \sum_0^n {}_i E_{\mu\nu}^i \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} + \Phi_\mu(x \mid \varphi) = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m),$$

$$(2) \qquad E_\mu = \sum_1^m {}_\nu \sum_0^n {}_{ik} E_{\mu\nu}^{ik} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \, \partial x_k} + \Phi_\mu(x \mid \varphi \mid \chi) = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m).$$

In questi le $E_{\mu\nu}^i$, Φ_μ sono funzioni delle x e delle φ, le $E_{\mu\nu}^{ik} = E_{\mu\nu}^{ki}$ e Φ_μ funzioni delle x, φ e loro derivate parziali χ del 1° ordine.

Il carattere *normale rispetto ad* x_0 sussiste sempre e quando sia $\| E_{\mu\nu}^0 \| \neq 0$ per i sistemi (1) e $\| E_{\mu\nu}^{00} \| \neq 0$ e per i sistemi (2).

Ciò posto, si dimostra con agilità che la condizione d'invarianza della *normalità rispetto a* z è data dall'equazione

$$\Omega = \| \omega_{\mu\nu} \| \neq 0$$

con

$$\omega_{\mu\nu} = \sum_1^n {}_i E_{\mu\nu}^i p_i \qquad \text{per (1)},$$

$$\omega_{\mu\nu} = \sum_1^n {}_{ik} E_{\mu\nu}^{ik} p_i p_k \qquad \text{per (2)},$$

essendosi posto al solito

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

Ne scende in conformità che, ove la z sia tale da soddisfare l'equazione

$$\Omega(x \mid p) = 0$$

non sarà più applicabile il teorema di CAUCHY. La *varietà* così definita prende allora il nome di *varietà caratteristica* appunto per questo suo singolare comportamento.

A titolo preparatorio, per un facile intendimento delle proprietà cospicue di varietà siffatte, l'A., dopo averne fatta la genesi, considera (§ 3) l'equazione canonica dei *piccoli moti*

$$\Box \varphi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \triangle_2 \varphi = 0$$

φ designando, ove si tratti di vibrazioni di fluidi, il cosidetto *potenziale di velocità*.

Indi, fissata l'attenzione su due superficie

$$z(t\,|\,x) = c_1, \quad z(t\,|\,x) = c_2$$

suppone che lo strato di fluido da esse limitato si trovi, ad un certo istante t, in vibrazione regnando invece all'esterno la quiete.

Su queste superficie σ, cosidette di *discontinuità*, dovranno raccordarsi due distinte soluzioni φ e $\overset{*}{\varphi}$ della $\square\varphi = 0$.

Se il raccordo avviene con osservanza di certi postulati fisico-geometrici, e se almeno una delle σ varia col tempo, si avrà la propagazione della discontinuità, la genesi di un'*onda*.

Queste considerazioni collegano nel modo più intimo le onde sopradefinite con le *superficie caratteristiche*.

Si intuisce così che, se su di queste vien meno il teorema di CAUCHY quanto all'*unicità* della soluzione, sotto certe condizioni, (quelle a cui sopra si è alluso), cosidette di *compatibilità*, ne possono esistere addirittura infinite.

Dopo aver rilevata l'importanza delle *superficie caratteristiche* dal punto di vista costruttivo nella soluzione del problema di CAUCHY in corrispondenza a *varietà ordinarie*, secondo le celebri ricerche di RIEMANN, DARBOUX, VOLTERRA ed HADAMARD, l'A. passa (§ 4) ad estendere le considerazioni particolari svolte sulla $\square\varphi = 0$ alla propagazione ondosa corrispondente ad un generico *sistema normale*.

Indi, dopo aver fatto vedere come certi enti essenziali del moto (p. e. *velocità di propagazione e di avanzamento*) si possono trarre indipendentemente dall'integrazione della $\Omega = 0$, fatte (§ 5) alcune digressioni perspicue sulla concezione generale del moto ondoso, riprende (§ 6), con accorgimenti personali di impostazione e di esposizione, il metodo di CAUCHY per l'integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine di cui lo schema generale è offerto dalla

$$\Omega(x\,|\,p) = 0,$$

o, se si vuole, risolvendo rispetto a p_0, da

$$p_0 + H(x_0, x_1, \ldots, x_n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$

Con che si mette in luce la *funzione hamiltoniana* H del *sistema canonico* a cui si riconduce l'integrazione dell'originaria equazione $\Omega = 0$. Le linee integrali (cosidette *bicaratteristiche*) del sistema suddetto definiscono una *varietà* σ che è proprio la cercata *varietà caratteristica*.

Indi, fatte alcune espressive applicazioni alle *onde piane* ed *epicentrali*, passa (§ 7) a determinare, con agilità veramente eccezionale in questioni così elevate, quelle *condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche* e *dinamiche* che le considerazioni speciali ed intuitive del § 5 avevano lasciato intravedere.

I § 8 e § 9 sono dedicati ad applicazioni dei metodi delineati all'idrodinamica ed all'elettro-magnetismo.

A § 10 vien fatto all'A. di soffermarsi sull'equazione famosa della *meccanica ondulatoria*

$$S = \Box\varphi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta_2\varphi = 0,$$

nella quale, com'è noto, il coefficente $\frac{1}{V^2}$ è sostituito con $\frac{2}{E}(U + E)$, E designando l'energia (da *quantizzarsi* mediante intervento degli *autovalori* definiti con condizioni di regolarità all'infinito) ed U il potenziale elettrostatico unitario.

Di questa equazione le *varietà caratteristiche* sono definite, in base ai precedenti risultati, dalla relazione

$$\Omega = \frac{1}{V^2}p_0^2 - \sum_1^3{}_i p_i^2 = 0,$$

e la *funzione hamiltoniana* delle *bicaratteristiche* è

$$H = -V\sqrt{\sum_1^3{}_i p_i^2}.$$

Di qui discendono i parziali aspetti di *onde* e *corpuscoli* che si possono associare all'equazione di Schrödinger $S = 0$. E lo stesso vale, più generalmente, per qualsivoglia fenomeno fisico matematicamente rappresentabile mediante un sistema *normale*.

Dopo queste ben ovvie constatazioni l'A. rileva che, mentre dalla $S = 0$ si può arrivare univocamente alla equazione delle *caratteristiche* (nonchè al *sistema canonico* che definisce le *bicaratteristiche*), non vale l'inversa, in quanto, e ciò è ben evidente dalle precedenti osservazioni, l'equazione $S + F = 0$ con F funzione arbitraria delle x, delle φ e loro prime derivate, possiede ancora le *stesse caratteristiche*.

Sicchè dunque, l'*esperienza macroscopica*, che palesandoci secondo i casi le *varietà caratteristiche* o le *linee bicaratteristiche*, o le une e le altre, ci dà di un fenomeno fisico appena un parziale aspetto è, almeno in generale, insufficiente per risalire al *sistema normale* che regge il fenomeno.

Avviene quindi qualcosa di analogo a quanto incontrerebbe chi, in meccanica, volesse dalle leggi del *moto impulsivo* pervenire alle equazioni generali della dinamica.

D' altronde questa indeterminazione contro cui si urta quando si voglia risalire dalle *caratteristiche* e *bicaratteristiche* alle leggi complete di un dato fenomeno appare a nostro avviso una ben naturale conseguenza dei dati di fatto.

Invero, l'onda di discontinuità, cioè la *superficie caratteristica*, altro non è, come ci accingiamo a dimostrare, se non un aspetto limite di un'onda vibratoria per vibrazioni a cortissima lunghezza d'onda.

Soffermiamoci infatti per maggior chiarezza sull'equazione di SCHRÖDINGER $S = 0$ e poniamo per φ la soluzione

$$\varphi = A e^{2\pi i\left(-\nu t + \frac{z}{\lambda}\right)}$$

con A e z funzioni incognite di t e delle x, ν *frequenza* e λ lunghezza d'onda.

Si trova allora, ritenendo che le cose vadano come se ν e $\frac{1}{\lambda}$ tendessero ad ∞,

$$\lim_{\substack{\nu \to \infty \\ \lambda \to 0}} S = \lim_{\substack{\nu \to \infty \\ \lambda \to 0}} \Box\varphi = \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2$$

cioè per la z, proprio l'equazione delle *caratteristiche* $\Omega = 0$. *L'onda di discontinuità* è dunque il limite per $\lambda \to 0$ dell'*onda vibratoria.*

Il dott. G. LAMPARIELLO ha raccolto queste belle lezioni con vero fervore, le ha scritte in forma piana, assai espressiva ed efficace.

L'interesse che queste avevano suscitato negli uditori è in particolare attestato da alcune pubblicazioni successive del LAMPARIELLO stesso.

Mi si consenta di segnalare in proposito (1) la dimostrazione di *non esistenza* di *onde di discontinuità* nei mezzi dissipativi, così notevole per semplicità, ed ancora quella interessante sulla possibilità di propagazione di *onde piane di discontinuità* nei mezzi elastici anisotropi più generali, i quali, com'è noto, *non* ammettono propagazioni di *onde piane vibratorie*.

GIULIO KRALL

(1) Cfr. Rendiconti Fisici della R. Accademia dei Lincei, 2° semestre 1931-X.

PIETRO BURGATTI: *Teoria matematica dell' Elasticità*, (volume terzo dell'*Analisi vettoriale generale e applicazioni*). Pag. VIII-370. Bologna, Zanichelli 1931.

Questo nuovo volume dell'Analisi vettoriale generale ha il doppio scopo, dichiarato esplicitamente dall'Autore nella Prefazione, di mostrare con quali vantaggi si applichi la detta Analisi alla Teoria matematica dell' elasticità, e di « offrire allo studioso una esposizione sistematica dei principali capitoli di questa scienza, onde prepararlo ad altre letture e a nuove ricerche nel campo della teoria e delle applicazioni ». Relativamente al primo di questi obbiettivi, è forse da temere che lo studioso abituato alle esposizioni tradizionali si trovi un po' a disagio almeno in una prima lettura; ma un esame più approfondito lo condurrà facilmente a riconoscere molto opportuna l' introduzione dell' algoritmo delle omografie vettoriali, che rende più svelta ed elegante la trattazione delle varie questioni, e al tempo stesso, alleggerendo i ragionamenti ed i calcoli, ed aiutando l' intuizione fà intravedere la possibilità di agevolare la ricerca di risultati nuovi. Si è così indotti a ritenere che l' opera del prof. BURGATTI possa pure pervenire all' ultimo degli obbiettivi accennati in principio (almeno per quanto si riferisce al campo teorico); e ciò potrà essere dovuto anche all'abbondanza delle questioni trattate, ed a una sapiente distribuzione dei vari argomenti, oltre che all' esposizione, chiara e concisa, di tutti i principali metodi sinora escogitati, e giudicati adatti per le ricerche relative alla Statica dei sistemi elastici [1].

È inoltre da rilevare che l'Autore è riuscito a meraviglia a mettere in evidenza il contributo ragguardevole portato dalla scuola

(1) Relativamente alle possibili applicazioni ai problemi tecnici, ci permettiamo di ricordare come molti anni or sono il prof. E. ALMANSI proponesse in un Suo opuscolo (*Introduzione alla Scienza delle Costruzioni*, Torino, 1901) che nelle Scuole d' Ingegneria si introducessero i fondamenti della Teoria matematica dell' elasticità, i quali permetterebbero fra l' altro un' esposizione organica dei problemi relativi alla deformazione di un cilindro elastico (in corrispondenza dei vari tipi di sollecitazione) in luogo di quella frammentaria (e fondata su molte ipotesi, solo apparentemente fra loro indipendenti), che si dà di solito nei corsi di Scienza delle Costruzioni. Più di recente il prof. ing. G. COLONNETTI ribadiva in sostanza gli stessi concetti, in un notevole libro, (*Principî di Statica dei solidi elastici*, Pisa, 1916), in cui si tratta della teoria in questione, da un punto di vista prevalentemente tecnico. È ora da augurarsi che anche quest' opera del prof. BURGATTI possa contribuire a quel ravvicinamento fra teoria e pratica, già auspicato dagli Autori citati, a proposito della medesima teoria trattata dal BURGATTI.

italiana, con nomi illustri come quelli di BELTRAMI, BETTI, CERRUTI, LAURICELLA, TEDONE, tra gli scomparsi, e di molti altri tuttora fortunatamente viventi (tra i quali non si può fare a meno di citare SOMIGLIANA, VOLTERRA, e lo stesso prof. BURGATTI). Ora è interessante rilevare che tale giusta esaltazione della produzione scientifica italiana in questo importante ramo della Fisica-matematica, sia stata conseguita servendosi di algoritmi e metodi prettamente italiani, quali sono quelli che scaturiscono dall'Analisi vettoriale generale, secondo l'indirizzo dato a questa da MARCOLONGO e BURALI-FORTI.

Il libro comincia con una Introduzione sulla teoria degli ordinari potenziali newtoniani, e dei potenziali dell'elasticità. Accanto ai primi, vengono naturalmente richiamate le proprietà essenziali delle funzioni (e anche delle omografie) armoniche.

I potenziali dell'elasticità sono integrali particolari delle equazioni indefinite per l'equilibrio dei corpi elastici isotropi, aventi (rispetto a queste) proprietà analoghe a quelle di cui godono gli omonimi newtoniani (rispetto all'equazione di LAPLACE, o di POISSON). L'introduzione di un'opportuna omografia permette di lumeggiarne le proprietà in maniera succinta e chiara.

Nel Capitolo I sono esposte le proprietà delle deformazioni finite, o infinitesime, indipendentemente dalla loro realizzazione, definite dall'uguaglianza

$$dP' = \left(1 + \frac{ds}{dP}\right) dP,$$

in cui dP è un elemento del solido allo stato naturale, dP' è l'elemento deformato, s il vettore spostamento. Particolarmente interessante è la ricerca delle espressioni che può assumere tale spostamento, per es., in seguito alla considerazione delle cosidette *linee di spostamento* (le analoghe delle linee di flusso per i fluidi), ricerca che agevola la determinazione dell'integrale generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio dei corpi elastici, che verrà fatta in uno dei capitoli successivi. L'introduzione dell'omografia della deformazione, $\varkappa = \frac{ds}{dP}$, permette di porre sotto forma semplice la condizione di SAINT-VENANT, la quale viene tradotta nel linguaggio vettoriale come la condizione necessaria e sufficiente perchè una data *dilatazione* rappresenti una *pura deformazione*. Chiude il Capitolo l'esposizione delle importanti ricerche di SOMIGLIANA, VOLTERRA e WEINGARTEN sulle deformazioni irregolari.

Nel successivo sono posti i principî della Statica dei corpi continui, (con l'introduzione dell'*omografia degli sforzi*) e in particolare dei corpi elastici. Viene poi dimostrata in modo ovvio la *sufficienza* delle equazioni indefinite (*teorema di unicità*) per il caso dell'isotropia. Successivamente si stabiliscono, con l'impiego dei potenziali dell'elasticità, ed opportunamente si interpretano le formule di SOMIGLIANA, che dànno un'espressione notevolissima per lo spostamento di un solido elastico e isotropo comunque deformato, in funzione degli spostamenti e degli sforzi corrispondenti alla superficie che limita il solido.

Troviamo poi esposti vari metodi generali per l'integrazione delle equazioni dell'elasticità. Uno di essi fu escogitato dal prof. O. TEDONE, con lo scopo di far dipendere il più possibile la detta integrazione della teoria delle funzioni armoniche. Le condizioni al contorno conducono però a dover risolvere delle equazioni integrali. Si ha così uno stretto legame col metodo che viene esposto dopo, fondato appunto sulle equazioni integrali, che è stato ripreso recentemente dal LICHTENSTEIN (e applicato dal CRUDELI) ma impiegato assai prima da diversi Matematici nostri (come BOGGIO, LAURICELLA, MARCOLONGO).

I Capitoli III e IV si accostano alle applicazioni, trattando i problemi speciali di maggior rilievo. Notevole è l'espressione (21) del Cap. III, che fornisce l'integrale generale dell'equazione indefinita per l'equilibrio di un solido elastico isotropo non soggetto a forze di massa, (indipendentemente dalle condizioni al contorno); per mezzo di essa lo spostamento più generale corrispondente alle condizioni ora poste viene a dipendere da tre funzioni armoniche arbitrarie.

Nel Cap. IV è data una nuova descrizione delle possibili deformazioni dei cilindri elastici, dei prismi e delle piastre.

Originale è pure l'esposizione della teoria delle verghe, e delle piastre sottili, fatta nel Cap. V, teoria che ha molta importanza per le applicazioni ai problemi tecnici; essa offre all'A. l'occasione di mostrare ancora una volta la perspicuità dei metodi vettoriali.

Il Cap. VI (ultimo della Statica) si riferisce ai corpi anisotropi; mentre l'ultimo del libro è dedicato ai fondamenti della Dinamica dei corpi elastici. Oltre alla deduzione delle equazioni indefinite, esso contiene una analisi della propagazione per onde, della teoria dei potenziali ritardati, e una chiara spiegazione dell'importante principio di KIRCHHOFF-HUYGENS.

Ci lusinghiamo che queste brevi indicazioni, su di un'opera così densa di contenuto, riescano a dare al lettore un'idea della reale sua importanza; mentre insistiamo nell'esprimere la ferma convinzione che l'opera stessa dia l'occasione ed il mezzo per giungere a nuove ed importanti ricerche nel campo delle teorie in essa esposte.

FRANCESCO SBRANA

Enciclopedia delle Matematiche Elementari a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI; Vol 1°, parte 2ª. pp. XVI + 609. (U. Hoepli, Milano, 1932; L. 82).

La seconda parte del 1° volume dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* è uscita in questi giorni coi tipi Hoepli. Essa segue a distanza di due anni la prima parte con la quale completa ampiamente e felicemente il volume dedicato all'Analisi. Non mancherà a questo nuovo libro il favore che incontrò il suo precedente nel campo dei matematici, non solo italiani, chè dall'estero giunsero i più simpatici giudizî, alcuni dei quali addiritura entusiastici. Ai Chiar.mi proff. BERZOLARI, VIVANTI e GIGLI che all'opera nè semplice nè facile si sono accinti con sì grande amore manifestiamo la nostra soddisfazione.

Questa seconda parte è fedele ai principî fondamentali dell'Enciclopedia, sia riguardo allo scopo, sia riguardo alla materia e all'indirizzo; principî che furono ricordati ai lettori di questo « Bollettino » nel presentare la prima parte (¹).

Il 1° volume dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (1ª e 2ª parte) è una rassegna rapida, chiara, completa e aggiornata di tutti i capitoli dell'Analisi elementare, con larghe notizie su vari argomenti cui appena si accenna, per ristrettezza di tempo, nei corsi universitari e che sono importanti o per il loro riferimento all'insegnamento elementare o perchè indispensabili alla comprensione di studi superiori.

Anche questa seconda parte è ricca di informazioni storiche e bibliografiche che ben permettono allo studioso di risalire alle opere che ne trattano diffusamente.

I primi cinque capitoli, dall'VIII° al XIII°, vive impronte dello stile di colui che possiede profondamente la materia e ne conosce ampiamente le fonti, sono di L. BERZOLARI.

Essi contengono: Cap. VII°: *Calcolo combinatorio.* – Cap. IX°: *Elementi della teoria dei gruppi.* È da notare che la trattazione si inizia considerando insieme i gruppi finiti e quelli infiniti; sono interessanti le notizie sulle opere di P. RUFFINI, E. GALOIS, A. CAUCHY e di C. JORDAN; il richiamo dei più recenti risultati della teoria; gli esempi geometrici che accompagnano il concetto di gruppo astratto; il cenno della dipendenza tra i diversi gruppi di trasformazioni e vari indirizzi geometrici.

Cap. X°: *Determinanti.* Il BERZOLARI ricorda F. BRIOSCHI autore

(¹) Anno VIII, 1929, pag. 276.

del primo trattato sull'argomento (1) e anche i contributi degli altri italiani TRUDI, CAPELLI, PASCAL, NICOLETTI, CIPOLLA.

Cap. XI°: *Equazioni lineari.* – Cap. XII°: *Sostituzioni, lineari, forme lineari, bilineari, quadratiche.* Sono teorie particolarmente importanti per coloro che vorranno in seguito famigliarizzarsi con i procedimenti del calcolo differenziale assoluto e colla teoria delle forme quadratiche con infinite variabili.

I Cap. XIII°: *Funzioni razionali di una o più variabili* e XIV°: *Proprietà generali delle equazioni algebriche,* sono del compianto O. NICOLETTI. Chi ne ammirò la limpidezza del pensiero, la precisione della forma nettamente concisa, la cura che Egli ebbe di tutto ricordare rilevando efficacemente i punti esenziali, ritrova quì i caratteri del caro Maestro che non possono sfuggire all'attento lettore.

L'A. espone quanto si riferisce al principio di identità, alla divisibilità dei polinomi, al concetto di riducibilità di un polinomio in un campo di razionalità, alla teoria di GALOIS delle equazioni algebriche, al teorema di BEZOUT sull'eliminazione.

Cap. XV°: *Equazioni di 2°, 3°, 4° grado ed altre equazioni algebriche particolari. Sistemi di equazioni algebriche di tipo elementare,* di E. G. TOGLIATTI. È ricco di ampie e preziose notizie sugli argomenti trattati e di riferimenti geometrici.

Cap. XVI°: *Metodi per la discussione di problemi di secondo grado e cenno su quelli di terzo e di quarto grado* di R. MARCOLONGO. È un capitolo particolarmente importante per gli insegnanti delle scuole medie, poichè non tutti ebbero da studenti medî la possibilità di esercitarsi nei problemi e di conoscere i metodi di discussione. Ora nell'acquistata maturità universitaria ognuno potrà avere larga visione della natura delle questioni sulle quali dovrà intrattenere i suoi alunni. Il MARCOLONGO guida nello studio completo della risoluzione dei problemi e della discussione, confronta i vari procedimenti e piacevolmente interessa.

Cap. XVII°: *Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti,* di G. VITALI. Il chiaro analista in forma schematica sviluppa le principali proprietà degli algoritmi infiniti. Particolarmente utili ai fini culturali le due parti sulle frazioni continue e sui prodotti infiniti.

G. VIVANTI che ha già a suo attivo la nobile fatica spesa per dare ai giovani i noti volumi su alcune delle principali teorie dell'Analisi, ha scritto i capitoli XVIII° e XIX°.

(1) F. BRIOSCHI. *La teoria dei determinanti e le sue pricipali applicazioni.* Pavia, 1854.

Il primo, *Elementi di analisi infinitesimale*, riepiloga la materia che viene svolta nei corsi di analisi infinitesimale, e termina con un sobrio e utile cenno sui problemi del *Calcolo delle differenze finite*.

Il secondo, *Rapporti fra la teoria degli aggregati e la matematica elementare*, in poche pagine illumina il lettore sulle profonde differenze delle proprietà degli aggregati finiti e infiniti; sui concetti di numero cardinale e ordinale, su quelli di corrispondenza biunivoca continua e di dimensione.

Col Cap. XX°, *Le funzioni analitiche da un punto di vista elementare*. S. PINCHERLE si rivolge, come dichiara l'illustre direttore di questo « Bollettino », da una parte a coloro fra gli insegnanti che desiderano veder ricordati, nel modo più *economico*, quei principî della teoria delle funzioni che hanno imparato a conoscere nei loro studi universitari, e d'altra parte agli studenti delle Facoltà universitarie che vi troveranno un ponte fra quanto forma argomento dei corsi di Analisi e qualche teoria che, in un prossimo avvenire, sarà loro compito di insegnare. In modo espressivo l'A. ricorda i due concetti di dipendenza generale nel senso di DIRICHLET e di dipendenza analitica, le equazioni funzionali atte a definire l'esponenziale e le funzioni circolari ed il procedimento classico delle serie ricorrenti per la risoluzione dell'equazione differenziale della funzione logaritmica.

L'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* è destinata ad avere il più fortunato successo.

Il 1° volume per merito degli ideatori e dei valenti collaboratori è egregiamente riuscito. Vogliamo quì rinnovare il voto dell'ultimo Congresso della « Mathesis » a Milano, che in ogni scuola media d'Italia esso si trovi a disposizione degli insegnanti.

GIOVANNI SANSONE

G. A. CAMPBELL e R. M. FOSTER: *Fourier Integrals for pratical Applications*. (Bell Telephone - Technical publications, settembre 1931, pag. 177).

Come è noto, ogni funzione $F(t)$ della variabile reale t, salvo talune restrizioni di carattere qualitativo, è rappresentabile, nell'intero campo reale in cui è data, mediante l'integrale doppio:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{i2\pi g(t-f)} df dg, \tag{1}$$

che si suole denominare *integrale di Fourier*, perchè costituisce ovviamente la estensione della nota rappresentazione di una funzione periodica mediante una serie procedente per le funzioni circolari di frequenze multiple della fondamentale. Nella espressione (1), che è essenzialmente reale perchè gli elementi dell'integrale sono a dne a due coniugati, si può anche intendere che l'esponenziale sia sostituito con la sua parte reale, come si suole comunemente fare nella trattazione delle grandezze armoniche mediante numeri complessi.

L'integrale di FOURIER conduce a considerare, accanto ad ogni funzione F, un'altra funzione G definita da:

$$G(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{-i2\pi fg} df, \tag{2}$$

che si può chiamare la sua « associata », mediante la quale la data F si esprime poi con l'integrale semplice

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(g) e^{i2\pi gt} dg. \tag{3}$$

Inspirandosi all'analogia con la ordinaria serie di FOURIER, si può dire che $G(g)dg$ corrisponde al *coefficiente* del termine armonico generico $e^{i2\pi gt}$ della serie stessa, il che spiega come la funzione G si soglia denominare « coefficiente della F ». Essa consente, in certo qual modo, di *analizzare* la F decomponendola negli infiniti elementi periodici dai quali la si può immaginare costituita. Siccome poi, come si rileva dalle (2) e (3), la relazione fra F e G è simmetrica, salvo un mutamento di segno dell'esponente di e, ne segue che non solo la $G(g)$ fornisce la analisi della $F(t)$, come è indicato dalla (3), ma inversamente, la $G(-g)$ costituisce la *sintesi* della stessa $F(f)$, come si deduce dalla (2).

In numerose quistioni che ricorrono nella Tecnica moderna, segnatamente nello studio del periodo transitorio di fenomeni periodici, è ovviamente assai utile operare l'analisi e la ricomposizione di funzioni secondo lo schema indicato. Se, ad esempio, sia proposto di studiare la variazione nel tempo della corrente in un circuito elettrico comprendente resistenza, induttanza e capacità, sottoposto all'azione di una f. e. m. comunque variabile nel tempo, converrà decomporre questa nei suoi elementi armonici semplici, valutare — secondo le leggi della Tecnica dei circuiti soggetti a f. e. m. armoniche — la corrente elementare corrispondente, e ricomporre le infinite correnti ottenute. Analiticamente, ciò equivale a ricercare, per la data f. e. m. $F(t)$, la funzione che, secondo la definizione data, ne rappresenta il « coefficiente » $G(g)$, operare su questa secondo la legge fisica conosciuta, ottenendosi così una funzione $G_1(g)$, che, considerata poi come « coefficiente » della cercata espressione della corrente, permetterà di risalire a questa.

Per una pratica applicazione di processi di tale genere, è manifestamente necessario disporre di tabelle che, accanto ad ogni funzione, facciano immediatamente conoscere la sua associata. E sono appunto tali tabelle, calcolate per un gran numero di funzioni, dalle algebriche più semplici, fino alle trascendenti più note e meno note, che gli AA. presentano al pubblico dei Matematici e dei Fisici, in un elegante volume edito a cura della « Bell Telephon System ». Le tabelle sono precedute da un ampia introduzione in cui sono chiaramente illustrate le notazioni adottate ed i concetti fondamentali cui si informa il metodo.

C. RIMINI

L. BIEBERBACH: *Projektive Geometrie.* (Bd. 30 dei « Teubners Mathematische Leitfaden ». Leipzig, Berlin 1931, pp. IV+190).

Al moderno ed elegante libretto sulla *Analytische Geometrie* (1), l'A. fa seguire questo fratello, un po' maggiore in mole, ma forse, nel piano e nei metodi, meno improntato ad originalità di vedute e di tecnica: per quanto anche qui, seguendo gl'intenti programmatici, il rilievo delle questioni sia commisurato essenzialmente al loro contenuto concettuale, ed in conseguenza sia trattato come contingente ed accessorio quanto non conferisce ad illustrare lo spirito della disciplina ed a rivelarne la portata. Va tuttavia avvertito, che, a favorire l'impiego corrente dei metodi analitici, la posizione delle nozioni fondamentali è essenzialmente aritmetico-analitica, restandone esclusa ogni considerazione delle questioni critico-assiomatiche che involgono la posizione logica della disciplina.

La prima parte è dedicata all'introduzione delle coordinate proiettive (dedotte formalmente dalle coordinate cartesiane e plückeriane omogenee) attraverso alle quali si riconosce la possibilità di atteggiare lo spazio ampliato (spazio affine completato mediante gli elementi impropri) a varietà numerica, donde subito si assurge alla nozione astratta di spazio proiettivo (numerico). Segue lo studio delle corrispondenze proiettive, introdotte dapprima formalmente

(1) Bd. 29 della stessa collezione: v. la recensione di ENEA BORTOLOTTI in questo Bollettino, IX (1930) p. 110.

come trasformazioni lineari, ma poi caratterizzate, nelle forme di prima specie, mediante la conservazione dei birapporti, nel piano e nello spazio mediante la proprietà di trasformare le sottovarietà lineari in sottovarietà analoghe. Di quest' ultima caratterizzazione l' A. dà una dimostrazione analitica, affidata all' analisi dell' equazione funzionale $\varphi(uv) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$, che scaturisce da un opportuna ed elegante impostazione del problema; il ragionamento ha però bisogno, in un punto, d' esser completato. Posto che la predetta equazione si trasforma subito nella $f(u+v) = f(u) + f(v)$, non era forse il caso di illustrare anche l' apporto di quest' ultima alla discussione del problena di caratterizzare le proiettività tra forme di prima specie, mediante la condizione di STAUDT? Sembra allo scrivente che ciò avrebbe conferito agli scopi istruttivi del libro, secondo le vedute dell' A.

Le proprietà particolari delle corrispondenze proiettive tra forme di prima specie son trattate esaurientemente. Di omografie piane si parla invece assai poco, e, a parte un rapido cenno sulle omologie, sol per quanto conferisca a precisare la subordinazione, entro al gruppo proiettivo, dei gruppi affine e metrico. È da ritenersi che solo la tirannia dello spazio abbia trattenuto l'A. dall' inserire nel suo manuale la discussione del problema degli elementi uniti (e conseguentemente della classificazione proiettiva) almeno per le omografie piane; perchè si pensa che tale discussione, in cui la teoria delle matrici ha un ufficio essenziale, avrebbe validamente contribuito alla propaganda che giustamente e brillantemente l'A. svolge in favore di tale algoritmo. Del quale c' è dato apprezzare l' efficacia sistematica nelle combinazioni simboliche, e nelle premesse generali allo studio delle varietà quadratiche (rango o polarità).

A queste è dedicata la seconda parte (quasi esattamente la seconda metà) del manuale, svolta modernamente, e con rigoroso adeguamento al principio gruppale di classificazione delle proprietà geometriche. Nei riguardi della classificazione metrica e dei problemi relativi (riduzione agli assi, invarianti ortogonali) soccorre l' ottima trattazione del precedente volumetto.

Una caratteristica attraente del libro risiede nelle esemplificazioni dedicate alla geometria del triangolo, che l'A. svolge, com' egli stesso dichiara, colla guida di due articoli della nostra BIGGIOGERO [1]. È da compiacersi che l'A. ne riconosca il pregio

[1] *Una visione proiettiva della Geometria del triangolo.* [Periodico di Mat. (4) Vol. VIII (1928) p. 345 e Vol. IX (1929) p. 167].

illustrativo e l'efficacia per la formazione culturale dei futuri insegnanti di scuole medie.

L'operetta in complesso si raccomanda per la chiara esposizione, e per il rilievo generalmente dato ai concetti ed agli algoritmi essenziali. Stupisce tuttavia a prima vista di non trovarvi cenno sulla geometria della retta, o qualche maggior sviluppo di geometria proiettiva complessa; ma l'A. ci promette di parlare di questo e d'altro in una terza parte che speriamo venga presto a completare la bella collezione. *a. c.*

Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano. Tomo V, (1931-IX). Milano, Libreria editrice Politecnica. Pagg. XII–225.

Questo nuovo volume dei « Rendiconti del Seminario matematico della Facoltà di Scienze milanese », pubblicato come i precedenti in elegante veste tipografica, contiene molte ed interessanti comunicazioni. Prima in ordine di pubblicazione e forse anche di importanza, è una estesa conferenza del prof. FRANCESCO SEVERI, Accademico d'Italia, dal titolo: *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*; essa raggiunge pienamente lo scopo, propostosi dall'Autore, di richiamare l'attenzione degli studiosi sopra un soggetto d'indagine tanto importante ed attraente, mentre mette efficacemente in vista la moltiplicità e l'interesse dei numerosi campi di studio limitrofi all'argomento in cui l'oratore e suoi discepoli hanno ottenuto molti e cospicui risultati. Seguono nobili ed affettuose parole del prof. G. A. MAGGI per segnalare il primo centenario dalla nascita di Luigi Cremona; dello stesso, una lettura su *L'attrito, in rapporto colla cinetostatica e colla classificazione dei vincoli.* Le altre letture, tutte degne di nota, sono:

O. CHISINI: *Sulle trasformazioni Cremoniane,* pure in occasione del ricordato centenario. – B. FINZI: *Matrici, Tensori, Omografie,* dove si pongono a raffronto le analogie, le differenze e le interdipendenze dei tre concetti. – U. BROGGI: *Su qualche punto di Analisi,* diretta ad evitare in certe questioni di Analisi, la risoluzione di equazioni algebriche. – L. SANTARELLA: *Temperatura e ritiro nelle costruzioni in cemento armato.* – G. VIVANTI: *Il Calcolo delle Variazioni, il Calcolo funzionale e l'Analisi generale,* rapida rassegna dell'applicazione dell'analisi funzionale al Calcolo delle Variazioni, di carattere storico e concettuale. – T. LEVI-CIVITA: *Sui getti liquidi,* poderoso lavoro sui getti nello spazio a tre dimensioni, il cui studio costituisce un campo arduo e già scarsamente esplorato; notevole il fatto che i risultati dell'A. trovano buona conferma sperimentale. – M. BOLDRINI: *Le medie indice nella statistica.* – G. SILVA: *I calcoli d'orbita e l'orbita di Plutone*, con largo accenno agli elementi indagati teoricamente prima della scoperta. – U. CISOTTI: *Circolazioni libere e problemi elettrostatici*, in cui è dimostrata la possibilità di esistenza di un moto permanente locale con più regioni di acqua morta. (*u.*)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Walter de Gruyter, Berlin. 1931.

Oltre ai 7 fascicoli di cui abbiamo dato notizia nel N° 4 dello scorso anno di questo « Bollettino », sono usciti nel 1931 altri 4 fascicoli, e precisamente i fascicoli III° e IV° dei volumi 54 e 55 per le annate 1928, 1929.

Il fascicolo III° è, per entrambe le annate, destinato ai rendiconti delle pubblicazioni uscite sopra argomenti di *Analisi*, distinte per materia secondo il seguente schema:

Cap. 1°: Fondamenti. Generalità. – Cap. 2°: Teoria delle successioni infinite di numeri. – Cap. 3°: Teoria delle funzioni di varibili reali. – *A*) Calcolo differenziale. *B*) Calcolo integrale. *C*) Nuove teorie delle funzioni di variabili reali. *D*) Serie trigonometriche. Cap. 4°: Teoria generale delle funzioni di variabile complessa. – Cap. 5°: Rappresentazione conforme, ed uniformizzazione. – Cap. 6: Funzioni particolari. – *A*) Funzioni elementari. Funzioni. *B*) Serie ipergeometriche, Funzioni sferiche. *C*) Funzioni algebriche e loro integrali. *D*) Funzioni ellittiche ed applicazioni. Funzioni modulari. *E*) Funzioni iperellitiche e Funzioni abeliane. *F*) Funzioni automorfe. Cap. 7°: Equazioni integrali, Funzioni di infinite variabili, Analisi funzionale. – Cap. 8°: Gruppi continui, Invarianti differenziali, Invarianti integrali. – Cap. 9°: Equazioni differenziali ordinarie. – Cap. 10°: Problemi al contorno nelle equazioni differenziali ordinarie. – Cap. 11°: Calcolo alle differenze, Teoria analitica delle frazioni continue. – Cap. 12°: Equazioni alle derivate parziali. – Cap. 13°: Teoria del Potenziale, Teoria delle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. – Cap. 14°: Equazioni differenziali di tipo parabolico ed iperbolico. – Cap. 15°: Calcolo delle variazioni – Cap. 16°: Calcolo delle probabilità ed applicazioni. – Cap. 17°: Pratica della Analisi.

Il fascicolo IV° è per entrambe le annate, dedicato alle pubblicazioni di *Geometria*, distribuite nei seguenti Capitoli:

Cap. 1°: Generalità, Fondamenti. – Cap. 2°: Topologia. – Cap. 3: Geometria elementare. – Cap. 4°: Geometria descrittiva. – Cap. 5°:

Geometria algebrica. – *A*) Generalità, trasformazioni birazionali. *B*) Coniche. *C*) Curve algebriche piane. *D*) Quadriche. *E*) Superficie algebriche, Curve gobbe, Sistemi di linee. *F*) Forme algebriche nello spazio a più di tre dimensioni. – Cap. 6°: Geometria differenziale. – *A*) Generalità, Geometria differenziale del piano. *B*) Geometria differenziale nello spazio euclideo a tre dimensioni. *C*) Geometria differenziale negli spazii ad *n* dimensioni e negli spazii generali. *D*) Classi convesse di punti. – Cap. 7°: Calcolo vettoriale e tensoriale. – Cap. 8°: Ottica geometrica.

A completare la collezione manca ancora il volume 52° che è in preparazione, ed uscirà insieme col volume 55° e col volume 56°. Nell'entrante annata uscirà anche il volume 57° (1931) e dipoi la pubblicazione continuerà con ritmo regolare. *et. b.*

FEDERIGO ENRIQUES: *Leçons de Géometrie projective.* Traduzione dalla quarta edizione italiana di P. LABÉRENNE. Paris, Gauthier-Villars et C., 1930, in 8°, pp. 430 e figure 186, prezzo fr. 60.

L'A. ci presenta, con questo libro, la traduzione francese delle sue classiche *Lezioni di Geometria proiettiva*, uscite nella loro prima edizione il 1897 e già alla loro quarta edizione nel 1919. Questa edizione francese viene a colmare una lacuna nella letteratura matematica francese: invero, non si aveva ancora in Francia un trattato completo che esponesse la Geometria proiettiva dal punto di vista moderno, indipendentemente da ogni considerazione metrica.

La versione è molto ben fatta ed elegante, e fa veramente onore al traduttore prof. P. LABÉRENNE. *a. m.*

MINEO CHINI: *Lezioni di Analisi Matematica.* Ad uso delle Scuole superiori di Architettura. (Livorno, Raffaele Giusti, 1931, p. VI, 398, 8°. L. 35)

La materia contenuta in questo libro è sostanzialmente la medesima del « Corso Speciale di Matematiche per chimici e naturalisti » dello stesso autore, e la trattazione si informa a quegli stessi principii, cioè è molto elementare e speditiva. Non fa duopo quindi che si faccia giudizio dell'opera; dove in cinque brevi capitoli si svolge l'Analisi algebrica, gli elementi di Geometria analitica, la introduzione all'Analisi infinitesimale, il Calcolo differenziale, il Calcolo integrale. La breve mole non comportava sviluppi di applicazioni e di esercizi. Per questa parte, l'A. rimanda a precedenti sue pubblicazioni favorevolmente note.

HERZBERGER: *Strahlenoptik*. I. Springer, Berlin, 1931.

Segnaliamo ai lettori del « Bollettino » questo interessante volume d'ottica geometrica, che è il trentacinquesimo dei « Grandlehren der Mat. Wiss. in Einzeldarstellungen ». Tutte le principali ricerche fatte su questo argomento nell'ultimo secolo sono qui abilmente collegate in una sistematica esposizione secondo e l'indirizzo più moderno.

Particolarmente notevoli per la chiarezza dello svolgimento e per la compiutezza dell'indagine sono le parti riguardanti l'ottica gaussiana e la teoria generale, dovuta a SEIDEL, dei « Bildfehlern ».

Il libro si chiude con un eccellente sommario storico intorno ai progressi di questa teoria da EUCLIDE in poi e con una diligente bibliografia, che accrescono l'interesse e l'utilità dell'opera.

p. b.