Bollettino Unione Matematica Italiana

Armando Chiellini

Intorno alla questione di costruire un quadrato circoscritto ad un dato quadrilatero

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 32–38.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_32_0>

Intorno alla questione di costruire un quadrato circoscritto ad un dato quadrilatero.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Pisa).

Sunto. - *L'Autore determina le condizioni necessarie e sufficienti affinchè dati nel piano quattro punti, tre a tre non allineati, esista un quadrato che li contenga sul suo perimetro, uno per lato.*

a) Il prof. J. G. DEUTSCH, nell' « American Mathematical Monthly », Maggio 1931, propone la seguente questione: *Dati quattro punti di un piano, tre a tre non allineati, trovare la condizione affinchè esista un quadrato che li contenga sul suo perimetro, uno per lato.*

Tale questione fu riferita nel n. IV, anno 1931, del « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », e nel numero successivo fu risolta dai proff. B. LEVI e G. VITALI, il secondo dei quali ne dette una soluzione vettoriale, il primo una di carattere geometrico proiettivo.

La questione fu separata in due, da prima supponendo che i quattro punti si debbano trovare sulle rette dei lati del quadrato e poi sui lati del quadrato; però nelle risoluzioni non sono date le condizioni analitiche sotto le quali le due questioni (o anche solo la prima) sono possibili.

Non credo quindi inutile del tutto far conoscere la seguente soluzione della questione in discorso, mediante la quale si determinano, in maniera semplicissima, le condizioni sotto le quali essa è possibile, e che inoltre offre il campo ad alcune considerazioni interessanti sulla geometria del triangolo.

b) A questo scopo cominciamo a premettere le seguenti considerazioni: preso un triangolo qualunque ABC (*), questo divide il piano in sette regioni, una limitata e sei no, di cui indicheremo con σ_A, σ_B, σ_C quelle aventi per frontiera un lato del triangolo e i prolungamenti degli altri due.

Allora si vede subito che assegnati comunque in un piano quattro punti (tre a tre non allineati), se uno di essi è in una delle regioni σ (precedentemente definite) relative al triangolo degli

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

altri tre, un altro *qualunque* dei quattro punti si trova nella stessa condizione relativamente al triangolo dei rimanenti.

Ciò premesso, se osserviamo che, supposto possibile il problema, i quattro punti si possono ordinare in guisa da risultare i vertici di un quadrilatero convesso non intrecciato, ne segue intanto che è necessario che uno qualunque dei quattro punti dati si trovi in una delle regioni σ relative al triangolo degli altri tre; infatti, se ciò non fosse, i quattro punti, in qualunque ordine li considerassimo, non potrebbero mai risultare vertici di un quadrilatero convesso non intrecciato ([1]).

D'altra parte, supposta verificata questa condizione, si vede facilmente che *i quattro punti si possono associare in uno ed in un sol modo in due coppie in guisa che i punti di una coppia si trovino da bande opposte della retta determinata dall'altra coppia.*

Potremo allora, indicando i quattro punti con $P_1P_2P_3P_4$, fare in modo che le due coppie siano formate dai punti P_1P_3 e P_2P_4 ([2]); dopo di che sceglieremo un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'origine in P_1, per asse delle x la P_1P_2, da P_1 verso P_2 e per asse delle y la perpendicolare ad essa, volta dalla parte di P_3.

c) Conduciamo poi per P_1, P_3 due rette qualunque, fra loro parallele, di coefficiente angolare m e da P_2, P_4 le rette ad esse perpendicolari; avremo, con notazioni evidenti,

$$y = mx, \quad y - y_3 = m(x - x_3) \tag{1}$$

come equazioni della prima coppia di rette e

$$y = \frac{x_2 - x}{m}, \quad y - y_4 = \frac{x_4 - x}{m} \tag{2}$$

come equazioni della seconda coppia.

Il quadrilatero $Q_1Q_2Q_3Q_4$ che così otteniamo, risulterà allora un rettangolo ed affinchè si riduca ad un quadrato sarà necessario e sufficiente che si abbia

$$|Q_4Q_1| = |Q_4Q_3|, \tag{3}$$

([1]) Possiamo osservare che questa condizione risolve geometricamente la quistione di decidere se un dato quadrilatero è convesso, oppure no.

Vedremo poi in seguito come si presti facilmente ad essere tradotta in condizioni analitiche tra le coordinate dei punti dati.

([2]) Nel caso p. es. in cui il punto D si trovi nella regione σ_B, le due coppie sono formate da (A, C) e (B, D); se D si trovasse nella regione σ_A le due coppie sarebbero costituite da (A, D) e (B, C); se infine D si trovasse nella regione σ_C le due coppie sarebbero (A, B) e (C, D).

Dalle (1) e (2) otteniamo senz'altro

$$\begin{cases} Q_1 \equiv \left(\dfrac{x_2}{1+m^2}, \dfrac{mx_2}{1+m^2}\right), \\ Q_2 \equiv \left(\dfrac{x_2 - my_3 + m^2x_3}{1+m^2}, \dfrac{m(x_2 - x_3) + y_3}{1+m^2}\right), \\ Q_3 \equiv \left(\dfrac{m^2x_3 + m(y_4 - y_3) + x_4}{1+m^2}, \dfrac{m^2y_4 + m(x_4 - x_3) + y_3}{1+m^2}\right), \\ Q_4 \equiv \left(\dfrac{my_4 + x_4}{1+m^2}, \dfrac{m^2y_4 + mx_4}{1+m^2}\right). \end{cases}$$

e tenendo conto di ciò, la (3) ci fornisce subito l'equazione di condizione

$$(my_4 + x_4 - x_2)^2 = (mx_3 - y_3)^2$$

da cui ricaviamo per m i due valori

$$m = \frac{x_2 - x_4 - y_3}{y_4 - x_3}, \quad m = \frac{x_2 - x_4 + y_3}{y_4 + x_3}. \tag{4}$$

Se limitassimo la questione al fatto che i quattro punti si debbano trovare sulle rette dei lati del quadrato, ambedue i valori (4) sarebbero accettabili e quindi si avrebbero due soluzioni, a meno che la precedente equazione di secondo grado in m non divenisse un'identità (o fosse impossibile): vedremo però subito come effettivamente uno solo dei valori (4) sia accettabile (al massimo).

d) Per poter appunto trovare le condizioni sotto le quali il problema è possibile e quale dei valori m vada sempre scartato, cominciamo col tradurre analiticamente la condizione precedentemente trovata, e cioè (conservando le notazioni precedenti) che il punto P_4 si trovi nella regione σ_2 relativa al triangolo $P_1P_2P_3$; la condizione in discorso è equivalente alle tre seguenti:

i punti P_3, P_4 devono essere dalla stessa parte della retta P_1P_2,
» P_2, P_4 » » da bande opposte della retta P_1P_3,
» P_1, P_4 » » dalla stessa parte della retta P_2P_3,

le quali, supponendo come si è già detto che sia $y_3 > 0$ (il che non lede affatto le generalità, potendo sempre ordinare i quattro punti dati in guisa che ciò avvenga), ci danno subito

$$\begin{cases} y_4 > 0, \quad x_3y_4 - x_4y_3 > 0 \\ x_2(y_3 - y_4) + (x_3y_4 - x_4y_3) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Supposte verificate le (5), affinchè il problema sia possibile è necessario e sufficiente che si verifichino le ulteriori circostanze: 1° il coefficiente angolare m deve essere negativo; 2° indicando per brevità con q_1, q_2, q_3, q_4 le ordinate dei punti $Q_1Q_2Q_3Q_4$,

$$\begin{cases} q_1 < 0, \quad q_2 > 0, \quad q_4 > 0 \\ (y_3 - q_3)(y_3 - q_2) < 0, \quad (y_4 - q_4)(y_4 - q_3) < 0 \end{cases}$$

Trascurata la condizione $q_1 < 0$, che è un' identità dovendo essere $m < 0$, le disuguaglianze precedenti assumono ordinatamente l' aspetto

$$(6) \qquad \begin{cases} m < 0, \quad m(x_2 - x_3) + y_3 > 0, \\ my_4 + x_4 < 0, \quad m(y_4 - y_3) + (x_4 - x_3) < 0, \\ 0 < y_4 - mx_4 < y_3 - mx_3. \end{cases}$$

Queste condizioni non possono mai essere soddisfatte insieme se si prende per m il secondo dei valori (4). Infatti: Se $y_4 + x_3 < 0$, per il che è necessario che lo sia x_3 e quindi (a causa di (5)) anche x_4, sostituendo nella seconda delle (6) il detto valore di m, otterremmo

$$x_2^2 - x_2x_4 + x_2y_3 - x_2x_3 + x_3x_4 + y_3y_4 < 0,$$

il che è assurdo, essendo il primo membro di questa uguaglianza una somma di quantità positive.

Se poi $y_4 + x_3 > 0$, dovrà essere (a causa della prima delle (6)) $x_2 - x_4 + y_3 < 0$ cioè $x_2 + y_3 < x_4$ e quindi x_4 e di conseguenza x_3 positivo; allora dalla terza delle (6) otterremmo

$$x_2y_4 + y_3y_4 + x_3x_4 < 0$$

il che è ugualmente assurdo. Quindi in ogni caso il secondo dei valori (4) è sempre da escludersi [3].

[3] Se, tenendo presente la risoluzione geometrica data dal prof. B. Levi, osserviamo che di soluzioni non ve ne può essere che una al massimo, la scelta del valore di m si può ottenere con la seguente elegante considerazione, che gentilmente lo stesso prof. B. Levi ha voluto farmi conoscere: Supponiamo dato il quadrato e mobili sui suoi lati i punti P_i; mentre questi si spostano sui lati, m varia con continuità e prende tutti i valori di cui è capace. Se il valore di m fosse talora uno, talora l' altro di quelli rappresentati dalle due espressioni (4), il passaggio dovrebbe avvenire attraverso un sistema P_1, P_2, P_3, P_4 per il quale i due valori di m sono uguali.

Ma questa uguaglianza richiede che sia $m = \frac{x_2 - x_4}{y_4} = \frac{y_3}{x_3}$ e si vede

Ne segue il risultato definitivo.

La questione propostaci ammette una ed una sola soluzione, data da

$$m = \frac{x_2 - x_4 - y_3}{y_4 - x_3}$$

purchè siano soddisfatte le disuguaglianze (5) *e* (6) *e purchè si prendano gli assi nel modo anzidetto.*

e) Vogliamo applicare il risultato generale precedente ad alcuni casi particolari. che presentano un certo interesse geometrico.

1°) *Caso del trapezio.* — Dovremo supporre $y_3 = y_4$. Le (5) e la quarta delle (6) si riducono a $x_3 > x_4$, mentre le altre divengono molto semplici, specie se si distinguono i due casi di $y_3 \gtrless x_3$.

2°) *Caso del parallelogrammo.* — Bisognerà fare l'ulteriore ipotesi di $x_3 = x_2 + x_4$. Possiamo inoltre sempre supporre $x_4 \geq 0$ e quindi $x_3 > 0$, mediante una scelta conveniente del punto chiamato P_1; allora anche la seconda e la quinta delle (6) divengono delle identità e rimangono le due condizioni

$$\frac{x_2 - x_4 - y_3}{y_3 - x_3} < 0, \qquad \frac{(x_2 - y_3)y_3 - x_3 x_4}{y_3 - x_3} < 0. \tag{7}$$

Se allora $y_3 > x_3 = x_2 + x_4$ queste sono delle identità, se invece $y_3 < x_3 = x_2 + x_4$, si riducono alle altre

$$y_3 < x_2 - x_4, \quad y_3(x_2 - y_3) - x_4(x_2 + x_4) > 0 \ \text{[4]}. \tag{8}$$

3°) *Caso del rombo e del rettangolo.* — Per avere un rettangolo, basta ulteriormente supporre $x_4 = 0$; allora anche le (8) divengono delle identità e quindi:

Se i quattro punti sono i vertici di un rettangolo, il problema è sempre possibile e il lato del quadrato forma con quello del rettangolo un angolo 45° ($m = -1$).

più precisamente che dovrebbe essece $x_2 - x_4 = y_3$, $y_4 = x_3$: quindi x_3 positivo e così m, il che non è possibile.

Non potendo avvenire scambio fra i due valori di m, deve valer sempre uno di essi e precisamente quello che è compatibile colla condizione che possa essere m negativo, anche con $x_2 - x_4 = y_3$; $y_4 = x_3$: questo è $m = \dfrac{x_2 - x_4 - y_3}{y_4 - x_3}$ che, nelle fatte ipotesi, assume la forma $\dfrac{0}{0}$.

[4] Il caso di $y_3 = x_3$ dà $m = -\infty$ e conduce ad una soluzione geometricamente evidente (escluso il caso del quadrato, in cui le condizioni divengono tutte delle identità e che ammette infinite soluzioni).

Per ottenere il rombo dovremo fare

$$x_2 = \frac{x_3^2 + y_3^2}{2x_3}, \quad x_4 = \frac{x_3^2 - y_3^2}{2x_3}$$

e di necessità $y_3 \leq x_3$; allora (escluso il caso di $y_3 = x_3$, che ci dà il quadrato) le (8) non sono possibili e quindi:

Se i quattro punti sono i vertici di un rombo (escluso il quadrato) il problema non è mai possibile.

Postilla di B. Levi (Bologna).

La semplicissima discussione algebrica del Chiellini dimostra come non fossi nel vero quando, lasciando prevalere la concezione geometrica del problema, supponevo che il calcolo algebrico delle condizioni richieste di appartenenza dei punti $P_1P_2P_3P_4$ al *perimetro* del quadrato dovesse essere faticoso.

Mi permetto di aggiungere qualche considerazione che in parte semplificano, in parte illuminano e completano le conclusioni del Chiellini.

Anzitutto si può osservare che le disuguaglianze scritte dal Chiellini debbono essere in qualche parte sovrabbondanti (non come contenuto, ma come numero) ed intanto debbono in qualche modo le (5) essere conseguenza delle (6). Infatti si può affermare a priori che *le condizioni esprimenti l'appartenenza dei punti* $P_1P_2P_3P_4$ *al perimetro del quadrato cercato sono espresse da quattro, e non più, disuguaglianze indipendenti*: se cioè, chiamiamo per chiarezza $y_1y_2y_3y_4$ le ordinate dei punti $P_1P_2P_3P_4$ (trascurando pel momento la scelta fatta di $y_1 = y_2 = 0$), vediamo che, una volta determinate le espressioni delle ordinate dei punti Q, le condizioni cercate sono espresse da

$$(9) \qquad \begin{array}{ll} (y_1 - q_1)(y_1 - q_4) < 0, & (y_2 - q_1)(y_2 - q_2) < 0, \\ (y_3 - q_2)(y_3 - q_3) < 0, & (y_4 - q_4)(y_4 - q_3) < 0 \end{array}$$

e queste condizioni — evidentemente necessarie e sufficienti — sono anche indipendenti fra loro, perchè fermi restando i valori delle q, si può renderle soddisfatte tutte meno una (qualunque) facendo scorrere convenientemente i punti P sui rispettivi lati del quadrato.

Evidentemente non si può riuscire a dare forma esplicita alle (9) senza la discussione del Chiellini, perchè è necessario di conoscere le espressioni delle q per mezzo delle coordinate dei punti P e alla completa determinazione di queste espressioni non si può riuscire se non si elimina l'ambiguità dell'espessione del numero m.

Ma a ricerca eseguita si può e conviene ritornare al gruppo delle disuguaglianze (9). Esse si scrivono immediatamente

$$
\begin{aligned}
& m y_4 + x_4 < 0 \\
& m^2(x_3 - x_2) + m y_3 < 0 \\
& [m y_3 + (x_2 - x_3)][m(y_3 - y_4) + (y_2 - x_4)] < 0 \\
& [y_4 - m x_4][(y_4 - y_3) - m(x_4 - x_3)] < 0
\end{aligned}
$$

dove naturalmente si deve sostituire ad m il suo valore

$$m = \frac{x_2 - x_4 - y_3}{y_4 - x_3}.$$

Lasciamo al lettore di effettuare la sostituzione. L'esame del risultato di essa conduce facilmente a tradurle in forma invariantiva rispetto alle trasformazioni di coordinate, che ci limitiamo ad enunciare: converrà, per metter meglio in evidenza l'invarianza, far uso della notazione vettoriale: indicheremo all'uopo, per brevità, con **1**, **2**, **3**, **4** i 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4, con $[ijk]$ e con $(i\,;\,jk)$ rispettivamente le espressioni

$$[ijk] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} = \frac{(j - i) \wedge (k - i)}{\bar{n}}$$

($\bar{n}$ versore assegnato normale al piano)

$$(i\,;\,jk) = (x_j - x_i)(x_k - x_i) + (y_j - y_i)(y_k - y_i) = (j - i) \times (k - i)\,;$$

infine con σ il segno (± 1) di $[1\,2\,3]$. Le nostre disuguaglianze si scrivono allora

$$
\begin{aligned}
& \{\sigma[1\,2\,4] - (1\,;\,3\,4)\}\,\{\sigma[1\,4\,2] + (1\,;\,3\,2)\} > 0 \\
& \{\sigma[2\,3\,1] - (2\,;\,4\,1)\}\,\{\sigma[2\,1\,3] + (2\,;\,4\,3)\} > 0 \\
& \{\sigma[3\,4\,2] - (3\,;\,1\,2)\}\,\{\sigma[3\,2\,4] + (3\,;\,1\,4)\} > 0 \\
& \{\sigma[4\,1\,3] - (4\,;\,2\,3)\}\,\{\sigma[4\,3\,1] + (4\,;\,2\,1)\} > 0.
\end{aligned}
$$

Si vede, com'è naturale, che esse si deducono tutte da una di esse mediante permutazione circolare degli indici **1**, **2**, **3**, **4**.