

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

PIA NALLI

## Sui funzionali analitici

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 11 (1932), n.1, p. 30–31.*

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1932\\_1\\_11\\_1\\_30\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_30_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

### Sui funzionali analitici.

Nota di PIA NALLI (a Catania).

**Sunto.** - *Si richiede una dimostrazione relativamente ad alcune asserzioni contenute in una Memoria del prof. L. FANTAPPIÉ, che viene citata.*

A fondamento della teoria dei *Funzionali analitici* del prof. L. FANTAPPIÉ <sup>(1)</sup> sta quanto passiamo ad esporre <sup>(2)</sup>.  $u(t)$  è una funzione analitica monodroma nel piano complesso  $t$ , olomorfa sopra una curva  $C$  (chiusa, semplice e regolare) ed all'esterno di essa;  $E$  è la regione che essa racchiude.

Si rappresenta  $E$  conformemente e biunivocamente sul cerchio del piano complesso  $t'$ , con centro in  $t' = 0$  e raggio 1, per mezzo

<sup>(1)</sup> L. FANTAPPIÉ. *I funzionali analitici*. « Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali ». Serie 6<sup>a</sup>, vol. III, fasc. XI (1930).

<sup>(2)</sup> Loc. cit. <sup>(1)</sup> pp. 25-27.

delle formule di trasformazione

$$t' = \tau(t), \quad t = \sigma(t')$$

$t$  e  $\sigma$  funzioni regolari, inversa l'una dell'altra, definite la prima per  $t$  variabile nella regione  $E$ , e la seconda per  $t'$  variabile nel cerchio considerato.

$\bar{C}$  è una curva interna ad  $E$  alla quale sono interni tutti i punti singolari di  $u(t)$ ; la trasformazione

$$t' = \tau(t)$$

fa corrispondere ad essa nel piano  $t'$  una circonferenza di raggio  $R < 1$ .

Si pone

$$(1) \quad u(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \frac{u(x)}{t - \sigma[\varepsilon\tau(x)]} dx$$

con

$$|\varepsilon| < \frac{1}{R}.$$

Si vede subito che  $u(t, \varepsilon)$  è funzione regolare di  $t$  all'esterno della curva  $\bar{C}(\varepsilon)$  trasformata per mezzo della

$$t = \sigma(t')$$

della circonferenza del piano  $t'$  con centro nell'origine e raggio  $R\varepsilon$ .

Ma il prof. FANTAPPIÈ asserisce (e da ciò deriva poi tutta la teoria dei funzionali analitici) che *l'espressione integrale (1) fa vedere che la  $u(t, \varepsilon)$  diventa singolare nei punti  $\sigma[\varepsilon\tau(t_k)]$ , se  $t_k$  sono i punti singolari della  $u(t)$ .*

Ora a noi pare che tutto ciò non sia evidente. Quello che si può asserire a prima vista è che in una regione connessa della quale faccia parte quella esterna a  $\bar{C}(\varepsilon)$  e non contenga nessuno dei punti  $\sigma[\varepsilon\tau(t_k)]$  la  $u(t, \varepsilon)$ , già definita all'esterno di  $\bar{C}(\varepsilon)$  per mezzo della (1), è prolungabile, monodroma e regolare. Ma, anzitutto, non risulta evidente che la  $u(t, \varepsilon)$  sia monodroma in tutto il piano complesso. E se mancasse la monodromia non si potrebbe parlare della *linea analitica*  $u(t, \varepsilon)$ , che ha un'importanza fondamentale.

Dimostrata la monodromia della  $u(t, \varepsilon)$ , si potrebbe solo asserire che i punti non regolari di  $u(t, \varepsilon)$  fanno parte dell'insieme dei punti  $\sigma[\varepsilon\tau(z_k)]$ , essendo  $z_k$  i punti non regolari di  $u(t)$ , ma sarebbe essenziale dimostrare che i punti  $\sigma[\varepsilon\tau(t_k)]$  sono effettivamente singolari per la  $u(t, \varepsilon)$ , e cioè, per usare una locuzione del prof. FANTAPPIÈ, che la  $u(t, \varepsilon)$ , per nessun valore di  $\varepsilon$ , è eccezionale per la linea analitica  $u(t, \varepsilon)$ .