Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Clara Lugaro

Sul moto maggiormente impedito e su un teorema del Gibbs

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 28–30.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_28_0>

Sul moto maggiormente impedito e su un teorema del Gibbs.

Nota di CLARA LUGARO (a Palermo).

Sunto. - *Si applica un teorema del* GIBBS *per vedere come si modificano le accelerazioni dei punti d'un sistema per l'aggiunta di nuovi vincoli, rispettanti l'atto di moto del sistema stesso.*

Consideriamo un sistema di punti materiali, con vincoli privi d'attrito dipendenti o no dal tempo; in un dato istante, s'introducano nel sistema nuovi vincoli, senza distruggere i primitivi, rispettando l'*atto di moto*, cioè mantenendo inalterata la posizione e la velocità iniziale di ciascun punto. Che cosa avviene nel *moto maggiormente impedito*? Come ha notato il prof. MINEO, la risposta è data dal principio della minima costrizione del GAUSS: *cresce la costrizione* [1].

Aggiungeremo che, mediante un teorema del GIBBS e in base alla soluzione del problema primitivo, siamo in grado di risolvere il nuovo problema dinamico. Il GIBBS, nel 1879, desiderando esprimere le equazioni del moto per mezzo d'una condizione di massimo o di minimo, giunge, indipendentemente dal GAUSS, mediante trasformazione della equazione generale della dinamica, a una *nuova formula del moto.*

Precisamente GIBBS ha stabilito che le accelerazioni reali del sistema rendono massima la funzione

$$(1) \qquad \sum\left[X\ddot{x} + Y\ddot{y} + Z\ddot{z} - \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)\right]$$

tra tutte le $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ compatibili coi legami del sistema [2].

La funzione (1), a meno di termini inessenziali non dipendenti dalle accelerazioni, non è che l'opposta della funzione cui conduce la nota interpretazione gaussiana; epperò il principio di massimo del GIBBS coincide, col principio di minimo del GAUSS.

Dal suo principio, il GIBBS deduce proprietà importanti, considerando come le accelerazioni del sistema, in un dato istante, vengano modificate per cambiamenti nelle forze o nei vincoli a cui il sistema è soggetto.

Si supponga che le forze (X, Y, Z) del sistema ricevano gl'incrementi (X', Y', Z'), in conseguenza dei quali e anche di certi vincoli addizionali, che non alterino le velocità dell'istante, le accelerazioni $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ ricevano gl'incrementi (da determinare) $(\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}')$. La funzione (1), a meno di termini costanti rispetto a $\ddot{x}'$, $\ddot{y}'$, $\ddot{z}'$, si riduce a

$$(2) \qquad \sum\left[X\ddot{x}' + Y\ddot{y}' + Z\ddot{z}' - m(\ddot{x}\ddot{x}' + \ddot{y}\ddot{y}' + \ddot{z}\ddot{z}')\right] + \\ + \sum\left[X'\ddot{x}' + Y'\ddot{y}' + Z'\ddot{z}' - \frac{m}{2}(\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2 + \ddot{z}'^2)\right];$$

e si tratta di trovare quei valori (*unici*, come si sa) di $\ddot{x}'$, $\ddot{y}'$, $\ddot{z}'$ che fanno assumere il massimo valore alla (2) tra tutti i valori $\ddot{x}'$, $\ddot{y}'$, $\ddot{z}'$ tali che $\ddot{x} + \ddot{x}'$, $\ddot{y} + \ddot{y}'$, $\ddot{z} + \ddot{z}'$ siano compatibili coi vincoli (primitivi e addizionali) del sistema.

[1] Vedi MINEO, *Sul modo di variare dell'energia d'accelerazione nel moto maggiormente impedito,* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno IX, 1930, p. 151.

[2] J. W. GIBBS, *On the fundamental formulae of Dynamics,* « American Journal of Mathematics pure and applied », vol. II, Baltimore 1879.

Il risultato è particolarmente notevole quando i vincoli, primitivi e addizionali, non dipendono dal tempo, perchè allora la (2) si riduce semplicemente a

$$(3) \qquad \sum \left| X'\ddot{x}' + Y'\ddot{y}' + Z'\ddot{z}' - \frac{m}{2}(\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2 + \ddot{z}'^2) \right|.$$

cioè assume la stessa forma della (1).

Il caso che risponde alla questione posta nella presente Nota è quello in cui $X' = Y' = Z' = 0$. Chiamerò $(\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}')$ *accelerazione guadagnata o perduta*: allora il corollario che si deduce dal teorema del GIBBS, *sempre nel caso di vincoli indipendenti dal tempo*, si può enunciare così:

Per l'introduzione di nuovi vincoli, il moto del sistema avviene in modo che l'energia d'accelerazione corrispondente alle accelerazioni perdute o guadagnate sia la minima possibile compatibilmente coi vincoli, primitivi e addizionali, del sistema.

Il caso in cui s'introducano nuove forze, ma non nuovi vincoli, è anche importante in molti problemi (p. es. quando si passa da un problema in cui si trascurano le resistenze di mezzo al problema in cui si tien conto anche di queste resistenze); perchè ci può essere vantaggio a scindere il problema in due altri eventualmente più semplici, o a servirsi della soluzione del primo problema per giungere a quella del secondo.