
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIETRO TORTORICI

Le congruenze W_{ab} a parametro medio costante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.1, p. 22–28.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_22_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_22_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Le congruenze W_{ab} a parametro medio costante.

Nota di PIETRO TORTORICI (a Palermo).

Sunto. - In questa nota l'A., facendo uso di alcune sue formule generali, costruisce la classe completa delle congruenze W_{ab} a parametro medio costante, cioè la classe di quelle congruenze W a parametro medio costante ammettenti, come falde della superficie focale, due rigate gobbe di cui una sola a piano direttore.

È notevole il fatto che ciascuna delle falde focali è, in ogni caso, deformabile in un iperboloide rotondo.

1. È noto che se si indicano con $\xi, \eta, \zeta; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ i coseni normalizzati della direzione della normale alle falde focali di una congruenza rettilinea W in punti corrispondenti e, con le notazioni usuali, si pone:

$$-\frac{1}{\rho^2} = K, \quad -\frac{1}{\bar{\rho}^2} = \bar{K},$$

K e $\bar{K}$ designando le curvature totali delle due falde focali si ha:

$$S\xi^2 = \rho, \quad S\bar{\xi}^2 = \bar{\rho}, \\ S\xi\bar{\xi} = \sqrt{\rho\bar{\rho}},$$

τ essendo l'angolo dei piani focali per il raggio generico della congruenza.

Se, su ogni raggio, d è la distanza dei punti limiti e δ quella dei fuochi, si ha ancora:

$$d^2 = \bar{\rho}\bar{\rho}, \quad \delta^2 = \bar{\rho}\bar{\rho} \sin^2 \sigma,$$

e però:

$$\sqrt{d^2 - \delta^2} = \sqrt{\bar{\rho}\bar{\rho}} \cos \sigma = S\bar{\xi}\bar{\xi}.$$

Alla espressione $\sqrt{d^2 - \delta^2}$ il BIANCHI ha dato il nome di *parametro medio della congruenza* e, in una sua Memoria, il compianto Maestro trattò ampiamente delle congruenze W a parametro medio costante ⁽¹⁾.

Scopo di questa Nota è di mostrare come, adoperando alcune mie formule generali, si possa determinare, in termini finiti, la classe completa delle congruenze W_{ab} a parametro medio costante, vale a dire la classe completa delle congruenze W a parametro medio costante ammettenti ciascuna, come falde focali, due superficie rigate $R_a, \bar{R}_b$ di cui la prima (soltanto) a piano direttore.

Son da rilevare, in questa ricerca, i risultati notevoli e la semplicità dei mezzi analitici adoperati per stabilirli.

2. Se $R_a, \bar{R}_b$ sono le falde focali di una congruenza W_{ab} generica, per i coseni direttori normalizzati delle loro normali in punti corrispondenti può porsi ⁽²⁾:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi} = \varphi_1(u) + k_1\psi(v), \\ \eta = \varphi_2(u) + k_2\psi(v), \\ \zeta = \varphi_3(u) + k_3\psi(v), \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi} = \frac{F_1'(u)}{U'(u)} - \frac{2F_1(u)}{U(u) + \psi(v)}, \\ \eta = \frac{F_2'(u)}{U'(u)} - \frac{2F_2(u)}{U(u) + \psi(v)}, \\ \bar{\zeta} = \frac{F_3'(u)}{U'(u)} - \frac{2F_3(u)}{U(u) + \psi(v)}, \end{array} \right.$$

u, v designando i parametri delle asintotiche, essendo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ tre funzioni arbitrarie di u ; k_1, k_2, k_3 tre costanti arbitrarie; $\psi(v)$ una funzione arbitraria di v , e avendo posto:

$$(2) \quad F_i'(u) = \varphi_i(u)U'(u) - k_i U'(u)U(u), \quad (i = 1, 2, 3).$$

⁽¹⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Le congruenze rettilinee W a parametro medio costante*. [*Annali di Matematica pura ed applicata*], serie III, t. XXII (1914), pp. 263-324.

⁽²⁾ Cfr. P. TORTORICI, *Alcune osservazioni analitiche sulle congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate*. [*Mathematische Zeitschrift*], Band 10, Heft 3-4, 1921].

La funzione trasformatrice $R(u, v)$, secondo la teoria metrica classica, ha per espressione:

$$R(u, v) = U(u) + \psi(v),$$

$U(u)$ designando pure una funzione arbitraria.

Affinchè la congruenza W_{ab} , costruita nel modo più generale alla maniera ora ricordata, sia a parametro medio costante, occorre e basta si abbia:

$$\bar{\zeta}\bar{\zeta} + \bar{\eta}\bar{\eta} + \bar{\zeta}\bar{\zeta} = p \quad (p \geq 0)$$

p designando appunto il valore costante del parametro medio.

Tenute presenti le espressioni avanti riportate, questa ultima condizione scrivesi:

$$\frac{1}{U'} S\varphi_1 F_1' - \frac{2}{U + \psi} S\varphi_1 F_1 + \frac{\psi}{U'} Sk_1 F_1' - \frac{2\psi}{U + \psi} Sk_1 F_1 = p$$

ossia, riducendo a forma intera ed ordinando rispetto alle potenze di ψ :

$$\begin{aligned} \psi^2 \cdot Sk_1 F_1' + \psi [S\varphi_1 F_1' + U \cdot Sk_1 F_1' - 2U' \cdot Sk_1 F_1 - pU'] + \\ + [U \cdot S\varphi_1 F_1' - 2U' \cdot S\varphi_1 F_1 - pUU'] = 0. \end{aligned}$$

Quest'ultima, essendo la funzione $\varphi(v)$ arbitraria, implica le altre tre identità:

$$(3) \quad \begin{cases} Sk_1 F_1' = 0 \\ Sk_1 F_1' - 2U' \cdot Sk_1 F_1 - pUU' = 0 \\ U \cdot S\varphi_1 F_1' - 2U' \cdot S\varphi_1 F_1 - pUU' = 0 \end{cases}$$

che, dunque, esprimono, da sole, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la congruenza W_{ab} sia a parametro medio costante.

È possibile trasformare le condizioni (3) in altre equivalenti involgenti *soltanto* le funzioni F_1, F_2, F_3, U .

Moltiplicando la seconda delle (3) per U e sottraendo dalla terza, (ricordando che è sempre $U' \neq 0$), deducesi intanto:

$$U \cdot Sk_1 F_1 - S\varphi_1 F_1 = 0$$

ed essendo, per le (2):

$$(2') \quad \varphi_i = \frac{F_i'}{U'} + k_i U \quad (i = 1, 2, 3),$$

questa scrivesi semplicemente:

$$SF_1 F_1' = 0,$$

mentre l'ultima delle (3) diventa:

$$SF_1'^2 - U'^2 [2Sk_1 F_1 + p] = 0.$$

In definitiva, dunque, le condizioni (necessarie e sufficienti) sono le seguenti:

$$(4) \quad \begin{cases} Sk_1 F_1' = 0, \\ SF_1 F_1' = 0, \\ SF_1'^2 - U'^2 [2Sk_1 F_1 + p] = 0. \end{cases}$$

Senza restrizione, assumendo a piano direttore della falda R_n il piano

$$z = 0.$$

può supporre che sia:

$$k_1 = k_2 = 0. \quad k_3 = 1$$

ed allora le (4) scrivonsi:

$$(5) \quad \begin{cases} F_3' = 0, \\ F_1 F_1' + F_2 F_2' = 0, \\ (F_1'^2 + F_2'^2) - 2U'^2 F_3 - pU'^2 = 0. \end{cases}$$

Denotando, quindi, con C una costante, porremo intanto:

$$F_3 = 2C^2.$$

La condizione

$$F_1 F_1' + F_2 F_2' = 0,$$

può scriversi:

$$F_1'^2 + F_2'^2 = B,$$

B essendo un'altra costante positiva, e a questa ultima uguaglianza poi si soddisfa, nel modo più generale, ponendo

$$F_1 = B \sin \lambda(u), \quad F_2 = -B \cos \lambda(u)$$

$\lambda(u)$ denotando una funzione per ora arbitraria. Se ne deduce:

$$F_1'^2 + F_2'^2 = B^2 \cdot \lambda'^2(u),$$

e, poichè ora l'ultima delle (5) dà:

$$U'^2 = \frac{B^2}{4C^2 + p} \lambda'^2(u),$$

può assumersi:

$$U = \frac{B}{\sqrt{4C^2 + p}} \lambda(u),$$

potendo ritenere nulla la costante additiva di integrazione, ciò che equivale ad alterare, per una costante additiva, la funzione $\psi(v)$ che compare nella espressione della funzione trasformatrice, alterazione che non ha alcun effetto in questa ricerca.

Ma, di più, cambiando il parametro u delle asintotiche può ritenersi

$$\lambda(u) = u,$$

e così si ha infine:

$$F_1 = B \operatorname{sen} u, \quad F_2 = -B \cos u, \quad F_3 = 2C^2; \\ U = Hu,$$

avendo posto:

$$H^2 = \frac{B^2}{4C^2 + p}.$$

Dalle (2') segue allora:

$$\varphi_1 = \frac{B}{H} \cos u, \quad \varphi_2 = \frac{B}{H} \operatorname{sen} u, \quad \varphi_3 = Hu.$$

Ponendo, come pure è lecito:

$$\varphi(v) = v,$$

le espressioni dei coseni normalizzati (1) delle normali alle due falde sono dunque:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{B}{H} \cos u, \\ \eta = \frac{B}{H} \operatorname{sen} u, \\ \zeta = Hu + v, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi} = \frac{B}{H} \cos u - \frac{2B \operatorname{sen} u}{Hu + v}, \\ \bar{\eta} = \frac{B}{H} \operatorname{sen} u + \frac{2B \cos u}{Hu + v}, \\ \bar{\zeta} = -\frac{4C^2}{Hu + v}, \end{array} \right.$$

e integrando, secondo formule note, da queste deduconsi, in termini finiti, le equazioni delle due falde $R_a, \bar{R}_b$.

3. Si osservi subito che:

Le due superficie focali R_a, R_b sono, ciascuna, applicabili su un iperboloide rotondo ad una falda (non necessariamente lo stesso per le due superficie)

Invero, fissate nella prima terna delle (6) ad arbitrio le costanti B, H , si scelga quindi la costante C^2 in modo che sia

$$4C^2 = \frac{B^2}{H^2}.$$

Siccome dalle formule precedenti, con tali determinazioni delle costanti, traesi:

$$p = S \bar{\xi} \bar{\xi} = \frac{B^2}{H^2} - 4C^2 = 0,$$

se ne conclude che la corrispondente congruenza W_{ab} è normale

e però le sue falde focali (in particolare la R_a definita dalla prima terna delle (6)) sono applicabili sull'iperboloide rotondo.

Medesimamente, per provare che la superficie definita dalla seconda terna (6) è applicabile pure sopra un iperboloide rotondo, si osservi che, salvo a cambiare il nome del parametro v , la superficie dipende solo dai valori dei rapporti $\frac{B}{H}$, $\frac{C^2}{H}$, talmente che, ponendo:

$$\frac{B}{H} = \beta, \quad \frac{C^2}{H} = \gamma,$$

se si sostituiscono B , C^2 , H coi numeri proporzionali βH_1 , γH_1 , H_1 ordinatamente, H_1 essendo scelto in modo che sia:

$$\beta^2 - 4H_1\gamma = 0,$$

la superficie $\bar{R}_b$, definita dalla seconda delle terne (6), non cambierà, mentre la prima terna (6) definirà una superficie R'_a .

Ma per la coppia R'_a , R_b è ancora:

$$p = \left(\frac{\beta H_1}{H_1}\right)^2 - 4H_1\gamma = 0,$$

cioè la corrispondente congruenza W_{ab} è di nuovo normale e quindi le due falde (in particolare la R_b definita dalla seconda terna (6)) sono applicabili su un iperboloide rotondo.

4. Detti $P(x, y, z)$, $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ i punti generici sulle due falde R_a , R_b , per integrazione deducesi dalle (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (Hu + v) \frac{B}{H} \sin u + 2B \cos u, \\ y = -(Hu + v) \frac{B}{H} \cos u + 2B \sin u, \\ z = -\frac{B^2}{H^2} u, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = -\frac{4BC^2 \sin u}{H(Hu + v)}, \\ \bar{y} = \frac{4BC^2 \cos u}{H(Hu + v)}, \\ \bar{z} = -\frac{B^2}{H^2} u + \frac{4B^2}{H(Hu + v)}. \end{array} \right.$$

Se da ciascuna di queste terne di formule si eliminano i parametri u , v delle asintotiche, traggonsi le equazioni di R_a , $\bar{R}_b$ ordinatamente:

$$x \cos \frac{H^2 z}{B^2} - y \sin \frac{H^2 z}{B^2} = 2B,$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{B^2}{C^4} \left(\bar{z} - \frac{B^2}{H^2} \arctg \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \right)^2.$$

Da queste equazioni può ancora dimostrarsi direttamente l'applicabilità di R_a , $\bar{R}_b$ sull'iperboloide rotondo. Lasciamo al lettore di verificare che l'iperbole meridiana dell'iperboloide su cui è applicabile R_a ha per equazione:

$$\frac{x^2}{4B^2} - \frac{z^2}{B^4} = 1,$$

$$H^4$$

mentre quella dell'iperboloide su cui è applicabile R_b ha come equazione:

$$\frac{x^2}{4B^2 \left(\frac{B^2}{4C^2 H^2} \right)^2} - \frac{z^2}{\frac{B^4}{H^4}} = 1$$

ovvero, facendo comparire il parametro medio p :

$$\frac{x^2}{4B^2 \left(\frac{4C^2 + p}{4C^2} \right)^2} - \frac{z^2}{\frac{B^4}{H^4}} = 1.$$

Per $p = 0$ i due profili meridiani, come è naturale, coincidono: anzi, se in quanto precede si dà a p tale valore, si ritrovano, per nuova via, alcuni risultati che ho fatto conoscere da tempo ⁽¹⁾.

(1) Cfr. P. TORTORICI, *Sulla deformazione dell'iperboloide rotondo ad una falda*. [Bollettino della U. M. I., Anno VI, n. 2, (1927)].