Bollettino Unione Matematica Italiana

Pietro Burgatti, Alessandro Terracini

Lettera del prof. Terracini al prof. Burgatti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 1–2.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

PICCOLE NOTE

Lettera del prof. Terracini al prof. Burgatti.

Sunto. - *Il prof.* TERRACINI *completa la dimostrazione d'un teorema del prof.* BURGATTI *enunciato nella Memoria:* Sull'equazione

$$(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$$

e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di $y_n(x) = 0$, *pubblicata negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » (S. II, vol. I, 1931).*

. . . . . Nel primo fascicolo dei rinnovati « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » ho letto con molto interesse le Sue eleganti ricerche relative alla realità degli zeri del polinomio $y_n(x)$, di grado n, che è soluzione dell'equazione differenziale

$$(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0. \tag{1}$$

Ella dimostra che, chiamando δ l'invariante lineare della (1), cioè l'espressione $a_1b_0 - a_0b_1$, sussiste il seguente teorema:

a) se $\delta < 0$, tutti gli zeri del polinomio $y_n(x)$ sono reali;

b) se $\delta < -a_1^2$, alcuni zeri sono immaginari.

Ella enuncia inoltre che:

c) se $0 > \delta > -a_1^2$, gli zeri del polinomio sono ancora reali.

Di quest'ultima parte Ella non ha data la dimostrazione, pur avendone verificata la validità per i primi valori di n.

Le sottopongo pertanto il seguente ragionamento, col quale io dimostrerei la sua proposizione *c*).

Supponiamo senz'altro $b_1 = 1$, e fissiamo per es. le idee, relativamente al polinomio in questione, supponendo che il coefficiente di x^n sia l'unità. I vari coefficienti successivi del polinomio stesso, quali per es. si ottengono per ricorrenza dalla stessa (1), risultano polinomi in a_1, a_0, b_0; perciò anche il discriminante G del polinomio $y_n(x)$ è un polinomio in a_1, a_0, b_0, e come tale, se riteniamo fissato a_1, è funzione continua delle a_0, b_0.

Interpretiamo a_0 e b_0 come coordinate cartesiane di un punto P variabile in un piano (π). Dimostrerò iu seguito che G è nullo soltanto se $\delta = -Na_1^2$, dove N può assumere certi valori interi positivi; quindi G è nullo soltanto se il punto P sta sulle rette. fra loro parallele, del piano (π) aventi rispettivamente le equazioni

$$(2) \qquad \delta = a_1 b_0 - a_0 = - N a_1{}^2.$$

Presi nel piano (π) due punti P_1 e P_2 per i quali sia rispettivamente $\delta > 0$ e $0 > \delta > - a_1{}^2$, essi si possono congiungere con un segmento rettilineo non incontrante nessuna delle rette (2); cosicchè quando un punto P lo percorre, il corrispondente polinomio $y_n(x)$ conserva sempre lo stesso numero di zeri reali, vale a dire n, quanti erano in P_1, secondo la proposizione a).

Tutto si riduce dunque a dimostrare che il discriminante G non s'annulla che in corrispondenza a valori multipli, secondo certi interi positivi, della quantità $- a_1{}^2$.

Supponiamo invero che per certi valori di a_1, a_0, b_0 il polinomio $y_n(x)$ abbia uno zero multiplo d'ordine r, essendo $2 \leq r \leq n$ Chiamando x_0 un tale zero, poniamo

$$y_n(x) = (x - x_0)^r A(x),$$

dove $A(x)$ è di grado $n - r$ e tale che certamente $A(x_0) \neq 0$. Sostituendo in (1), si ha

$$(a_1 x + a_0)[r(r-1)A(x) + 2r(x - x_0)A'(x) + (x - x_0)^2 A''(x)] +$$
$$+ (x + b_0)[r(x - x_0)A(x) + (x - x_0)^2 A'(x)] = n(x - x_0)^2 A(x);$$

che dev'essere una identità rispetto a x. Osserviamo intanto che il primo membro dev'essere, al pari del secondo, divisibile per $x - x_0$: ciò che dà la condizione

$$a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Poi osserviamo che lo stesso primo membro dev'essere anche divisibile, come il secondo, per $(x - x_0)^2$: cosicchè si ottiene l'altra condizione

$$(r-1)a_1 + x_0 + b_0 = 0.$$

Perciò, valendosi di queste due relazioni per formare l'espressione di δ, risulta

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 x_0 \\ 1 & -x_0 - (r-1)a_1 \end{vmatrix} = -(r-1)a_1{}^2.$$

Si conclude che δ è un multiplo, secondo l'intero positivo $r - 1$, di $-a_1{}^2$: il che dimostra l'asserto....

N. B. — Ringrazio cordialmente il prof. TERRACINI d'aver completata la dimostrazione del teorema ricordato di sopra e con mezzi tanto semplici, laddove io credevo occorresse una più sottile e profonda indagine.

P. BURGATTI