BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

CORRADINO MINEO

Sul moto dei sistemi soggetti a vincoli unilaterali senza attrito, esprimibili per mezzo di inequazioni in forma finita

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 18–22.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_18_0>

Sul moto dei sistemi soggetti a vincoli unilaterali senza attrito, esprimibili per mezzo di inequazioni in forma finita.

Nota di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Sunto - *Si dimostra che anche nel caso di vincoli esprimibili per mezzo di inequazioni in forma finita la relazione simbolica della Dinamica (nella consueta forma) basta alla risoluzione del problema del moto ed è perfettamente equivalente al principio della minima costrizione di* GAUSS.

Il GIBBS, nella sua bella e fondamentale Memoria *On the fundamental formulae of Dinamics* (« American Journal of Mathematics pure and applied », Vol. II, 1879), dopo aver dimostrato rigorosamente l'equivalenza tra la relazione

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i\right] \leqq 0$$

e la consueta relazione simbolica della Dinamica

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] \leqq 0,$$

nell'ipotesi di legami bilaterali (senza attrito), cerca di giustificare (con considerazioni originali) l'estensione della (1) al caso di vincoli unilaterali rappresentati da relazioni

$$(3)\qquad f_1 \leqq 0,\quad f_2 \leqq 0, \ldots,\quad f_r \leqq 0 \qquad (r < 3n),$$

dove i primi membri sono funzioni di x_i, $\dot{x}_i \ldots$ e del tempo. Secondo il GIBBS, là dove la (2) fallisce, nel caso di vincoli (3), la (1) mette sempre in grado di assegnare senza ambiguità nel dato istante le accelerazioni $\ddot{x}_i \ldots$ in funzione di x_i, $\dot{x}_i \ldots$ e del tempo.

Il MAYER, nel 1899, riprendendo la questione in tutta la sua generalità, prova che alla soluzione di essa si può arrivare, partendo dal principio della minima costrizione di GAUSS, cioè in fondo dalla (1). Egli, in sostanza, mostra con quale procedimento bisogna cercare *una* soluzione, lasciando insoluta la questione dell'esistenza effettiva e dell'unicità della soluzione stessa ([1]). L'esistenza e l'unicità della soluzione, *fondandosi sul principio della minima costrizione*, fu subito dopo dimostrata dallo ZERMELO ([2]).

Mi propongo di dimostrare:

1°) che per mezzo della relazione simbolica della Dinamica, nella consueta forma (2), si arriva alle stesse conclusioni del MAYER, anche nel caso di vincoli unilaterali (3);

2°) che il principio della minima costrizione di GAUSS equivale perfettamente alla (2), anche nel caso di vincoli (3);

3°) che la soluzione, quindi, del problema dinamico esiste ed è unica.

1. Con $\dot{f}_j$, $\ddot{f}_j$ indico le derivate totali, prima e seconda, rispetto al tempo, della funzione $f_j (j = 1, 2, \ldots, r)$. Si ha, con notazione

([1]) *Ueber die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für die reibungslose Punktsystemen, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind* (« Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig », 1899).

([2]) *Ueber die Bewegung eines Punktsystemes bei Bedingungsungleichungen* (« Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen », Mathematisch-physikalische Klasse, 1899).

manifestamente abbreviata:

$$\ddot{f}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \ddot{x}_j + F_j, \tag{4}$$

essendo F_j funzione di x_i, $\dot{x}_i$ e del tempo.

Il caso che soltanto importa considerare è chiaramente quello in cui nell'istante t considerato i legami siano tutti realizzati per posizioni e velocità; cioè si abbia

$$f_j = \dot{f}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{5}$$

Dalle (3) e (5) segue necessariamente

$$\ddot{f}_j \leqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{6}$$

Ora quei valori cercati di $\ddot{x}_i$ verificheranno alcune delle (6) come equazioni e le rimanenti come inequazioni; e poichè non è possibile alcuna previsione *a priori*, bisogna necessariamente procedere per tentativi, per vedere quale dei 2^r casi possibili conviene al problema. Poniamo, in via ipotetica, che le (6) si scindano nei due gruppi

$$\ddot{f}_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k), \tag{7}$$

$$\ddot{f}_\nu < 0 \qquad (\nu = k+1, k+2, \ldots, r). \tag{8}$$

Allora da $f_\nu = \dot{f}_\nu = 0$, $\ddot{f}_\nu < 0$ si deduce (supponendo $\ddot{f}_\nu$ funzione continua di t):

$$f_\nu(t + \tau) < 0,$$

per un τ finito convenientemente piccolo; dunque i vincoli $f_\nu = 0$ sono in procinto di sciogliersi nell'istante t, ed è come se non esistessero in quell'istante. Gli spostamenti virtuali compatibili con i legami devono dunque sodisfare soltanto le k relazioni

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \delta x_i \leqq 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k). \tag{9}$$

Poichè il segno $=$ nelle (9) porta necessariamente il segno $=$ nella (2), si conchiude che gl'incogniti $\ddot{x}_i$ devono esser della forma

$$m_i \ddot{x}_i = X_i - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \text{ (}^1\text{)} \tag{10}$$

(1) Le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono univocamente determinate dal sistema lineare che si deduce operando la sostituzione (10) nelle (7); giacchè il determinante del sistema, come risulta direttamente, è il quadrato d'una matrice rettangolare e non si può annullare se non nel caso (da escludere) che le

Intanto si ha, per le (10):

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i \equiv \lambda_1 \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\delta x_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\delta x_i + \dots + \lambda_k \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i .$$

E poichè dalle (9) deve seguire la (2), si deduce subito

(11) $$\lambda_1 \geqq 0, \quad \lambda_2 \geqq 0, \dots, \quad \lambda_k \geqq 0.$$

Se le (11) sono verificate e se inoltre i valori di $\ddot{x}_i$ tratti dalle (10) verificano le (8), allora i valori dati dalle (10) costituiscono una soluzione possibile. È questo appunto il risultato del MAYER.

2. Se le predette due condizioni sono sodisfatte, è facile dimostrare che tra tutti i valori $\ddot{x}_i$ che (restando invariati x_i e $\dot{x}_i$) verificano le (6) quelli tratti dalle (10) rendono minima la funzione di GAUSS

$$\Gamma(\ddot{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{X_i}{m_i} - \ddot{x}_i\right)^2 .$$

Passiamo infatti ai valori $\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i$, in modo che si abbia

(12) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i \leqq 0 \qquad (\mu = 1, 2, \dots, k).$$

Se i $\delta\ddot{x}_i$ sono abbastanza piccoli in valore assoluto, avremo senz'altro, a cagione delle (8):

(13) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i \leqq 0 \quad (\nu = k+1,\ k+2, \dots, r);$$

sicchè i valori $\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i$ verificano tutte le (6). Intanto

$$\Gamma(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i) = \Gamma(\ddot{x}_i) - 2\lambda_1 \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i - \dots - 2\lambda_k \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta\ddot{x}_i^{\,2}.$$

E per le (11), (12) si deduce

$$\Gamma(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i) > \Gamma(\ddot{x}_i),$$

salvo che non siano tutti i nulli i $\delta\ddot{x}_i$. Dunque $\ddot{x}_i$ è anzi un punto di minimo proprio per la funzione di GAUSS.

funzioni $f_1, f_2, \dots, f_k$ siano funzionalmente dipendenti. Indirettamente si può anche notare che il determinante in parola è il discriminante della forma quadratica (non semidefinita)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)^2 .$$

3. Reciprocamente, si cerchi un minimo di $\Gamma(\ddot{x}_i)$ sotto le condizioni (6). Anche qui bisogna procedere indirettamente per tentativi. Ammettiamo che nel cercato punto di minimo le (6) si scindano nelle (7) e (8). I valori estremanti di $\Gamma(\ddot{x}_i)$ sono allora necessariamente della forma (10); ma è facile dimostrare che, affinchè si tratti effettivamente di minimo, devono esser verificate le (11) e inoltre i valori dati dalle (10) devono verificare le (8). Dunque, a ogni punto di minimo di $\Gamma(\ddot{x}_i)$ o sotto le condizioni (6) corrisponde una soluzione possibile del problema dinamico (n. 1). Il che mostra l' equivalenza del principio di GAUSS alla relazione simbolica (2) della Dinamica, anche nel caso di vincoli unilaterali (3).

4. Ora la funzione $\Gamma(\ddot{x}_i)$ non ammette, nel dominio (6), che un sol punto di minimo proprio, che è il suo minimo assoluto, come ha dimostrato lo ZERMELO: cosa che dipende dall' essere convesso il dominio (6). Ne viene che la soluzione del problema dinamico esiste ed è unica.