BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

RADU BĂDESCU

Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.1, p. 13–17.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_13_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso.

Nota di RADU BADESCU (Cluj - Romania).

In una recente Nota (²) abbiamo considerato l'estensione dell'equazione di FREDHOLM nel campo complesso

$$\Phi(z) - \lambda \int_{(C)} K(z, s)\Phi(s)ds = \Psi(z) \tag{1}$$

(²) « Bollettino della Unione Mat. Italiana », anno X, n. 4, p. 217, 1931.

la funzione $K(z, s)$ essendo meromorfa in un certo dominio del piano s. In base ad alcune ipotesi fatte sulla forma della $K(z, s)$, sulla $\Psi(z)$ e anche sul contorno d'integrazione C, abbiamo mostrato che la risoluzione della (1) può essere ricondotta a quella di un'equazione funzionale considerata dal sig. CINQUINI (¹), equazione che è in un stretto rapporto col problema generale dell'iterazione. Vogliamo adesso liberarci dal *carattere locale* della soluzione $\Phi(z)$ utilizzando le ricerche ben note dei sig. FATOU e JULIA (²) sulle funzioni iterative.

Nella nostra Nota abbiamo considerato una somma finita di nuclei della forma

$$\sum_{p=0}^{m_j} \frac{K_{j,p}(z, s)}{[s - \theta_j(z)]^{p+1}} \tag{2}$$

le funzioni $K_{j,p}(z, s)$ essendo olomorfe rispetto a z sul dominio chiuso D, limitato dalla curva d'integrazione C, curva semplice e continua, e rispetto ad s su un certo dominio D_j, interamente contenuto nel D. Non abbiamo precisato la natura di queste funzioni nel dominio $(D - D_j)$, ma è chiaro che, nel caso studiato, è sufficiente di supporre le funzioni $K_{j,p}(z, s)$ olomorfe rispetto all'insieme delle due variabili sul dominio aperto D e soltanto continue rispetto ad s sulla curva C, acciochè l'integrale figurando nella (1) abbia un senso.

La funzione $\Phi(z)$, soluzione della (1), è olomorfa anche se z viene sulla curva C: dunque il suo dominio d'esistenza e più grande che D. Sia $\theta_j^{(-1)}(z)$ il ramo inverso della funzione razionale $\theta_j(z)$, eguale a ζ per $z = \zeta$, e sia C_j^{-1} la curva ottenuta applicando alla C la trasformazione $Z = \theta_j^{(-1)}(z)$. C_j^{-1} contiene interamente la curva C. Se z appartiene al dominio D_j^{-1} limitato dalla curva C_j^{-1}, si potrà, utilizzando l'integrale del CAUCHY, ricondurre la risoluzione della (1) a quella dell'equazione funzionale considerata dal sig. CINQUINI, ottenendo gli stessi risultati. Dunque, sulla C_j^{-1} esiste almeno un punto per il quale l'espressione (2) cessa d'aver un senso. Deduciamo allora che la soluzione $\Phi(z)$ della (1) è olomorfa nell'interno di un certo dominio D^{-1} se tutte le funzioni $K_{j,p}(z, s)$ sono olomorfe rispetto a z sui domini corrispondenti D_j^{-1}, D^{-1} essendo la parte semplicemente connessa comune a questi domini (³). E chiaro che in tal caso l'espressione

(¹) « Bollettino della Unione Mat. Italiana », anno IX, n. 2, p. 63, 1930.

(²) FATOU, « Bull. Soc. Math. France », t. 47, 1919, p. 161; JULIA, « Journal de Liouville », t. IV, 7-ème série, 1918, p. 47.

(³) E rispetto ad s nell'interno della C.

analitica della $\Phi(z)$ definisce una funzione olomorfa nell' interno del dominio D^{-1}, la sua frontiera contenendo almeno un punto per il quale l'integrale che figura nella (1) cessa d'aver un senso. Il nostro metodo non ci ha permesso di prolungare analiticamente questa funzione nella parte esterna a D^{-1} contenuta nel dominio D_0 e comune ai domini immediati d'attrazione relativi alle funzioni $\theta_j(z)$.

Consideriamo ora per maggior semplicità (¹), soltanto il nucleo seguente

$$\sum_{p=0}^{m} \frac{K_p(z, s)}{[s - \theta(z)]^{p+1}} \tag{3}$$

e sia Δ il dominio totale d'attrazione relativo alla funzione $\theta(z)$, dominio che contiene il punto fisso attrativo ζ corrispondente alla trasformazione $Z = \theta(z)$. Δ comprende in generale una infinità numerabile di domini aperti, a connessione semplice. Se la curva d'integrazione C appartiene interamente al dominio immediato Δ_0, soddisfacendo anche alle condizioni introdotte nella prima nostra Nota, la soluzione $\Phi(z)$ dell'equazione (1) sarà olomorfa nel dominio D^{-1}, limitato dalla curva C^{-1} che si ottiene trasformando la C mediante il ramo della funzione inversa di $\theta(z)$ eguale a ζ per $z = \zeta$. Questa osservazione ci permette di stabilire il carattere effettivo della $\Phi(z)$ anche in certe regioni esterne al dominio Δ_0 ma appartenendo a Δ. Perciò, consideriamo la curva Γ_0 ottenuta trasformando la C mediante gli n rami della funzione inversa $\theta_{-1}(z)$ di $\theta(z)$, n essendo il grado della funzione razionale $\theta(z)$. Essa è composta di n curve chiuse $\gamma_0^{(i)}$, tutte distinte, che sono interamente contenute nel dominio totale Δ. Allora, se z appartiene ad uno qualunque dei domini $\delta_0^{(i)}$, limitati dalle curve $\gamma_0^{(i)}$, il punto $\theta(z)$ sarà evidentemente interno alla C e, in questo caso ancora, si potrà determinare nello stesso modo la soluzione $\Phi(z)$ dell'equazione (1). La sua espressione analitica, dedotta dalla (1) col metodo adoperato da noi in una Nota precedente (²), ci permetterà di definire il suo carattere d'olomorfia nell'interno del dominio D_0, limitato dalla curva Γ_0. Poichè questo dominio si compone di n domini semplicemente connessi, completamente separati l'uno dall'altro, risulta che l'espressione analitica della $\Phi(z)$ rappresenta n funzioni distinte rispettivamente nei domini $\delta_0^{(i)}$, perchè è chiaro

(¹) Per una somma finita di nuclei, si devono sopraporre i dominii parziali d'olomorfia per ottenere il dominio d'esistenza della $\Phi(z)$.

(²) « Comptes rendus de l'Académio Royale de Belgique », 5.ème série, t. XV, p. 1062.

che non si può prolungare analiticamente una qualunque di queste funzioni attraverso l'insieme F che contiene i punti irregolari dell'iterazione mediante la $\theta(z)$, questo insieme formando la frontiera del dominio Δ.

Questo risultato può essere ancora generalizzato. Infatti, sia C una curva chiusa e continua, appartenente interamente al dominio totale d'attrazione Δ, e sia Γ la curva ottenuta trasformando la C mediante gli n rami della funzione inversa $\theta_{-1}(z)$. La Γ si compone di n curve chiuse γ_i appartenenti tutte al dominio Δ. Indichiamo poi con p il più piccolo numero intero e positivo per il quale la trasformata Γ_p della C mediante la p-^{esima} iterata $\theta_p(z)$ sia una curva completamente contenuta nel dominio Δ_0 e soddisfacente alla condizione introdotta nella prima nostra Nota [1]. Se il punto z è supposto interno alla curva Γ, $\theta(z)$ sarà contenuto nella C, e allora, utilizzando la trasformazione classica

$$F^{(p)}(x) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{F(s)}{(s-x)^{p+1}}\, ds$$

troveremo un'equazione funzionale della forma

$$\Phi(z) - \lambda \sum_{p=0}^{m} F_p(z)\Phi^{(p)}[\theta(z)] = \Psi(z) \tag{4}$$

considerata per la prima volta dal sig. CINQUINI, ma nella quale z non appartiene più al dominio immediato d'attrazione Δ_0. Una semplice sostituzione ci permetterà di ricondurre la risoluzione di questa equazione a quella studiata dal sig. CINQUINI. Infatti, ponendo $\theta_{p+1}(z) = u$, avremo $z = \theta_{-p-1}(u)$, dove $\theta_{-p-1}(u)$ è uno qualunque dei rami della funzione inversa di $\theta_{p+1}(z)$. Indichiamo allora con $\theta^{(i)}_{-p-1}(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gli n rami che trasformano la Γ_p nella curva Γ, la quale, come abbiamo veduto, è composta di n curve chiuse. Le n trasformazioni

$$z_i = \theta^{(i)}_{-p-1}(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sono evidentemente biunivoche e permettono di passare dal dominio chiuso D_p, limitato dalla Γ_p, ad uno qualunque dei domini parziali limitati dalla Γ.

Precisati questi punti, sostituiamo a z la funzione $\theta^{(i)}_{-p-1}(u)$ nella (4) e poniamo $\Phi[\theta^{(i)}_{-p-1}(u)] = \Phi_i(u)$, $\Phi_i(u)$ essendo la nuova funzione incognita. Otterremo un'equazione funzionale della stessa

[1] La trasformata della Γ_p mediante la funzione $\theta(z)$ dev'essere interamente contenuta nella Γ_p.

forma (4) che rientra ora nel tipo studiato dal CINQUINI, perchè il punto u si trova nell'interno della curva Γ_p. Questa equazione una volta risolta, si potrà determinare la funzione $\Phi(z)$ dalla relazione

$$\Phi(z) = \Phi_i[\theta_{p+1}(z)].$$

Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

La soluzione $\Phi(z)$ dell'equazione di Fredholm (1) *nel caso di una curva C continua, chiusa, che appartiene interamente al dominio totale d'attrazione Δ* (e soddisfa anche alla condizione introdotta nell'ultima parte della nostra Nota), *può essere definita su n domini semplicemente connessi che si ottengono trasformando la C mediante tutti gli n rami della funzione inversa di $\theta(z)$. $\Phi(z)$ è olomorfa nell'interno di questi domini, ma le funzioni rappresentate dalla sua espressione analitica sono generalmente distinte.*

Per ottenere questo risultato, abbiamo implicitamente supposto che tutte le funzioni $K_i(z, s)$ sono olomorfe rispetto ad s nell'interno della C, continue su questa curva, e olomorfe rispetto a z nel dominio aperto limitato dalla curva Γ.

Prima di finire, facciamo una osservazione sull'olomorfia della funzione $\theta(z)$. È chiaro che, mediante una trasformazione omografica, si può supporre che il punto all'infinito non appartiene al dominio totale d'attrazione Δ (che è un dominio aperto), e allora, effettuando nella (1) sulla variabile z una trasformazione omografica conveniente, si otterrà un'equazione integrale della stessa forma, equazione per la quale il teorema precedente è ancora valido. Dunque, prima di risolvere l'equazione (1), dovremo fare una trasformazione omografica sulla z tale che il punto all'infinito sia esterno o sulla frontiera del dominio totale Δ, e allora non saremo più obbligati di fare alcun altra supposizione sulla funzione $\theta(z)$.