BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

NICULAE ABRAMESCO

Sull' autogenerazione delle curve piane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.1, p. 10–13.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_1_10_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sull'autogenerazione delle curve piane.

Nota di N. ABRAMESCO (Cluj - Romania).

Sunto. - *Si determina in modo continuo un punto qualunque di una curva con l'aiuto di un numero dato di punti e di un parametro variabile reale. Per le coniche si ottengono dei punti discreti con l'aiuto di tre punti dati e di una operazione funzionale.*

1. Una curva algebrica piana essendo determinata da un numero dato di punti, esporremo un metodo per trovare in modo continuo la posizione di un punto qualunque della curva con l'aiuto di questi punti e di un parametro variabile reale; in una parola di trovare l'equazione autogeneratrice della curva.

1^o) Per una retta determinata dai punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , un punto qualunque è dato dall'espressione

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad z = x + iy.$$

indipendente dall'origine degli assi, λ essendo un parametro variabile reale.

2°) per un cerchio, consideriamo la retta definita dai punti z_1, z_2 di cui l'equazione autogeneratrice è

$$(1) \quad Z = \frac{Z_1 + \lambda Z_2}{1 + \lambda}, \quad Z = X + iY,$$

e facciamo la trasformazione $zZ = 1$, $z = x + iy$. Il punto z descriverà un cerchio passante per l'origine e per i punti z_1, z_2 trasformati dei punti Z_1, Z_2 . Sostituendo in (1) Z con $\frac{1}{z}$, si ottiene

$$\frac{z_1 - z}{z - z_2} = \lambda \frac{z_1}{z_2}.$$

Prendiamo un'origine arbitraria, o ciò che torna lo stesso, sostituiamo z con $z - z_0$, z_0 essendo la posizione della antica origine in rapporto alla nuova; l'equazione autogeneratrice del cerchio definito dai punti z_0, z_1, z_2 è

$$(2) \quad \frac{z_1 - z}{z - z_2} = \lambda \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}, \quad z = \frac{z_1(z_2 - z_0) + \lambda z_2(z_1 - z_0)}{z_2 - z_0 + \lambda(z_1 - z_0)},$$

λ essendo parametro variabile reale.

3°) Consideriamo una curva (C) semplicemente connessa. Si può con l'aiuto di una rappresentazione conforme

$$(3) \quad z = f(Z), \quad Z = \varphi(z),$$

fare corrispondere ad ogni punto z della curva (C) del piano z , un punto Z del cerchio (γ) di raggio R nel piano Z , e reciprocamente. Ora, noi abbiamo visto che un punto Z del cerchio (γ) , definito dai punti Z_1, Z_2, Z_3 , è dato dalla formula (2),

$$Z = \frac{Z_1(Z_2 - Z_0) + \lambda Z_2(Z_1 - Z_0)}{Z_2 - Z_0 + \lambda(Z_1 - Z_0)},$$

dove, sostituendo Z_0, Z_1, Z_2 colla relazione $Z = \varphi(z)$, si trova

$$Z = \frac{\alpha + \lambda\beta}{\gamma + \lambda\delta},$$

essendo λ un parametro reale variabile e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ funzioni di z_0, z_1, z_2 , che corrispondono a Z_0, Z_1, Z_2 per mezzo della trasformazione (3).

Sostituendo Z in (3), si ottiene

$$z = f\left(\frac{\alpha + \lambda\beta}{\gamma + \lambda\delta}\right),$$

che è l'equazione autogeneratrice della curva (C), essendo λ un parametro reale variabile in modo che ad ogni valore di λ corrisponde un punto determinato della curva (C).

ESEMPLI. Nel caso dell'ellisse di fuochi $-1, +1$, si avrà

$$z = f(Z) = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right), \quad Z = \varphi(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}; \quad |Z| = R.$$

Per una ovale di CASSINI, $|z - 1| |z + 1| = \text{cost}$, si ha in corrispondenza

$$z = f(Z) = \frac{1}{Z} \sqrt{1 - Z^2}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad |Z| = R \neq 1.$$

2. In luogo di determinare in modo continuo tutti i punti di una curva, si possono ottenere punti discreti della curva stessa per mezzo di un certo numero di punti della curva, col sussidio di una operazione funzionale, come ora mostreremo per le coniche.

1°) Dati tre punti M_0, M_1, M_2 e l'operazione funzionale che consiste: nel condurre per M_0 una parallela M_0M_3 a M_1M_2 e tre volte maggiore, $\overline{M_0M_3} = 3\overline{M_1M_2}$; poi, da M_1 una parallela M_1M_4 a M_2M_3 e tre volte maggiore, $\overline{M_1M_4} = 3\overline{M_2M_3}$. Mostriamo che i punti così ottenuti si trovano su una parabola. Infatti, siano a, b i punti che dividono M_0M_3 in tre parti uguali, $M_0a = ab = bM_3$; così pure, b, c i punti che dividono M_1M_4 in tre parti uguali, $M_1b = bc = cM_4$. Per i punti M_0, M_1, M_2, M_3 passa una parabola in cui, essendo inscritte le corde parallele M_1M_2, M_0M_3 , la direzione asintotica della parabola è mn , congiungente dei punti di mezzo m ed n delle corde M_1M_2, M_0M_3 , che sono i punti di mezzo di M_1M_2 ed ab . Per M_1, M_2, M_3, M_4 passa un'altra parabola avente per direzione asintotica pq , essendo p e q i punti di mezzo di M_2M_3, M_1M_4 o punti di mezzo di M_2M_3, bc . Ora mn e pq sono parallele come parallele a bM_2 ; dunque le direzioni asintotiche di queste due parabole sono le stesse. Le parabole $M_0M_1M_2M_3, M_1M_2M_3M_4$ avendo tre punti in comune e la stessa direzione asintotica, devono coincidere. Talchè il luogo dei punti $M_4, M_5, \dots$ è la parabola che passa per i punti M_0, M_1, M_2, M_3 .

2°) Supponiamo analogamente che si diano tre punti M_0, M_1, M_2 , che per M_1 si conduca la parallela a M_1M_2 e che $\overline{M_0M_3} = k \cdot \overline{M_1M_2}$ (nel caso precedente, $k = 3$) (1). Operando nello stesso modo con M_1 , si ottiene $M_4, \overline{M_1M_4} = k \cdot \overline{M_2M_3}$, ecc. Prendiamo, su $M_0M_3, M_0b = cM_3 = M_1M_2$, su $M_1M_4, M_1c = eM_4 = M_2M_3$; siano m il punto di

(1) Perchè la figura riesca, conviene prendere per un momento

$$\overline{M_0M_3} > 3\overline{M_1M_2}.$$

mezzo di $\overline{M_1M_2}$, n quello di bc , p quello di M_2M_3 , q quello di ce .
 Si ha $bc = \overline{M_0M_3} - 2\overline{M_1M_2} = (k-2)\overline{M_1M_2}$; $ce = (k-2)\overline{M_2M_3}$.

Le rette bM_1 , nm , cM_2 , qp , eM_3 concorrono in uno stesso punto O , poichè $\frac{nc}{mM_2} = \frac{cq}{M_2p} = \frac{cO}{OM_2} = \frac{k-2}{1} = \text{cost.}$ Consideriamo la conica che passa per i punti M_0 , M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , si vede che M_0M_3 , M_1M_2 da una parte, e M_1M_4 , M_2M_3 dall'altra, sono corde parallele di questa conica, e quindi i diametri mn , pq di essa si incontrano nel centro O della conica. Costruendo nello stesso modo il punto M_5 , si vede che la conica $M_0M_1M_2M_3M_4$ coincide colla conica $M_1M_2M_3M_4M_5$ come avente lo stesso centro e quattro punti comuni. Il luogo dei punti così costruiti è dunque una conica, iperbole se il centro O è esterno alla curva $M_0M_1M_2M_3M_4$, $\frac{nc}{mM_2} > 1$, $\frac{k-2}{1} > 1$, $k > 3$; ellisse, il centro O interno, $k < 3$; parabola (centro O all'infinito) se $k = 3$.

3°) Indicando con $z = x + iy$ l'affisso del punto M , si possono ottenere i punti discreti di una conica, dati i tre punti z_0 , z_1 , z_2 e l'operazione funzionale (1)

$$z_{n+3} - z_n = k(z_{n+2} - z_{n+1}), \quad \overline{M_nM_{n+3}} = k \cdot \overline{M_{n+1}M_{n+2}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

si ottiene una ellisse se è $k < 3$, un'iperbole se è $k > 3$ e una parabola se è $k = 3$.

Dati dunque tre punti M_0 , M_1 , M_2 e l'operazione funzionale che consiste nel condurre per M_0 una parallela per M_0M_3 a M_1M_2 , k volte maggiore, $\overline{M_0M_3} = k \cdot \overline{M_1M_2}$ per M_1 , $\overline{M_1M_4} = k \cdot \overline{M_2M_3}$, ecc., i punti M_3 , M_4 , ... sono su di una conica, ellisse, iperbole o parabola secondo che è $k < 3$, $k > 3$ o $k = 3$.

(1) Dedotta da un corso del prof. D. POMPEIU, *Differenze e Differenziali*, tenuto nella Università di Cluj.