UMI

Corrispondenza

* Risposte: Maria D'Ascia, B. Levi, Giuseppe Vitali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 319–323.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

46. *Determinare con sufficiente approssimazione una radice dell'equazione*

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{3\pi}{2} - x$$

nell'intervallo $(0, \pi/2)$.

Derivando due volte la funzione

$$f(x) = x + \operatorname{ctg} x - \frac{3\pi}{2}$$

si riconosce che $f(x)$ decresce costantemente nell'intervallo $(0, \pi/2)$ passando dal valore $+\infty$ per $x = 0$ al valore $-\pi$ per $x = \frac{\pi}{2}$ volgendo sempre la concavità verso l'alto. Esiste quindi un'unica radice ξ della (1), che risulta compresa fra 0,21 e 0,22, come si riconosce percorrendo le tavole numeriche di $\operatorname{ctg} x$.

Per approssimare ulteriormente ξ mi sono servita del metodo delle secanti e delle tangenti. Nel caso attuale, posto

$$p_0 = 0{,}21\,; \quad p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

$$q_0 = 0{,}22\,; \quad q_n = \frac{p_{n-1} f(q_{n-1}) - q_{n-1} f(p_{n-1})}{f(q_{n-1}) - f(p_{n-1})}$$

si ha

$$p_n \leq \xi \leq q_n\,; \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \xi.$$

Alla seconda approssimazione ho ottenuto

$$0{,}21897 < \xi < 0{,}21898.$$

MARIA D'ASCIA

47. Si tratta di determinare la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un quadrato i cui lati contengano quattro

punti assegnati del piano. È utile dividere il problema in due tempi:

1°) *Costruire un quadrato tale che le rette dei suoi lati passino per quattro punti assegnati del piano.*

2°) *Determinare la condizione necessaria e sufficiente perchè il problema ammetta una soluzione nella quale i quattro punti dati stiano sui segmenti lati del quadrato.*

1°. — Il primo problema ha sempre due ovvero infinite soluzioni che si determinano colla considerazione seguente:

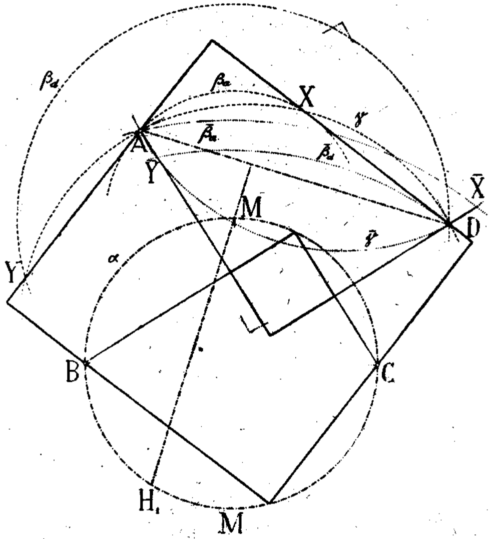
Siano A, B, C, D i quattro punti assegnati e si voglia che *nell'ordine in cui sono nominati* essi stiano sui lati successivi di un quadrato.

Sia α la circonferenza che ha per diametro BC e sia M il punto medio di una delle due semicirconferenze terminate a questo diametro. Si conduca per A una retta arbitraria x', per M la perpendicolare ad essa che incontri ulteriormente α in H, per D la perpendicolare ad HC e si chiami questa retta x'': è chiaro che le rette x'', HC, HM sono i tre lati di un triangolo rettangolo isoscele il cui simmetrico rispetto alla retta HM ha ancora per ipotenusa HM e per uno dei cateti HB: la condizione necessaria e sufficiente affinchè il detto trilatero (x'', HC, HM) sia la metà di un quadrato soddisfacente al problema è che il rimanente cateto del suddetto simmetrico passi per A: e poichè la retta x' è unita nella nominata simmetria, ciò significa che deve A essere il punto corrispondente, nella simmetria medesima, al punto d'incontro delle rette $x'x''$: altrimenti detto, il punto $x'x''$ deve stare sulla circonferenza β di centro M e passante per A. Osserviamo ora che, variando la retta x' le rette MH, HC, x'' rotano intorno ai rispettivi punti M, C, D descrivendo fasci uguali e concordi al fascio descritto da x': il luogo dei punti d'intersezione di x', x'' è dunque una circonferenza γ passante per i punti A e D: questa incontra la circonferenza β, fuori di A, in un punto X il quale, con D, determina il quarto lato del quadrato cercato.

Conviene notare che la circonferenza γ si può caratterizzare come una delle due circonferenze passanti per A e D e sulle quali questi punti distano per un quadrante. La scelta fra queste due circonferenze non può essere fatta che ricorrendo, dal più al meno, alla costruzione precedente: comunque una semplificazione, utile anche per il seguito, per tale determinazione è la seguente: Dal punto M si conduca la perpendicolare alla retta AD, la quale incontri α in H_1: la circonferenza cercata sarà quella che ha per tangenti in A e in D rispettivamente le parallele ad H_1C e ad H_1B.

Osserviamo ancora che solo apparentemente la costruzione indicata è asimmetrica rispetto ai punti assegnati: basterà cioè scambiare in essa le lettere A e D e le lettere B e C per ottenerne la determinazione del primo lato del quadrato (passante per A): quanto è detto nell'alinea precedente mostra allora che la circonferenza γ resta invariata con questo scambio e si ha quindi la seguente costruzione perfettamente simmetrica.

Descritta la circonferenza α di diametro BC e fissato su di essa uno dei due possibili punti M, si determini, come sopra è detto, la circonferenza γ e, con centro in M si descrivano le due circonfe-



renze β_a e β_d passanti rispettivamente per A e per D: esse incontrino ulteriormente la γ nei due punti X e Y: le rette AY e DX saranno i lati del quadrato cercato passanti rispettivamente per A e per D.

2°. — Quest'ultima forma della costruzione si presta particolarmente a risolvere la seconda questione: si vede subito che, affinchè i quattro punti A, B, C, D possano appartenere ai segmenti lati successivi di un quadrato è necessario che il quadrangolo $ABCD$ sia convesso e che tale resti ancora quando uno qualunque dei suoi lati si sostituisca mediante la perpendicolare in uno dei suoi estremi all'altro lato uscente da questo. Assegnati i punti $ABCD$ soddisfacenti a queste condizioni, l'eventuale quadrato ai cui lati essi appartengono si otterrà mediante la precedente costruzione scegliendo il punto M sulla semicirconferenza di diametro BC che sta, rispetto a BC dalla parte dei punti A, D. Ne segue che se il quadrato cercato esiste, è unico (a meno che ne esistano infiniti, v. *oltre*). Assegnato così il punto M, risultano anche determinate le circonferenze β_a, β_d, γ e quindi i due punti X, Y: questi dovranno stare da bande opposte della corda AD; allora dei due angoli AXD, AYD uno sarà acuto (di 45°) e l'altro ottuso (di 135°): deve il vertice dell'angolo ottuso essere dalla banda opposta di BC tanto rispetto alla retta AD quanto rispetto alla perpendicolare in D a DC se esso è il punto X ovvero a quella in A ad AB se esso è il punto Y.

Poichè tutte le costruzioni descritte si traducono analiticamente in operazioni razionali a partire dagli elementi che definiscono la posizione relativa dei punti A, B, C, D (per es. le loro coordinate), tutte queste condizioni si esprimono, ove si voglia, in un sistema di disuguaglianze fra espressioni razionali nei suddetti elementi, la cui effettiva formazione è soltanto questione di un calcolo algebrico probabilmente materialmente faticoso.

Più interessante sarà qualche considerazione complementare: Dalle cose dette risulta che il problema 1° ha sempre due soluzioni corrispondenti alle due diverse posizioni dei punti M. Può però darsi che a una di queste posizioni corrispondano infinite soluzioni e ciò avviene quando, rispetto alla detta posizione di M le tre circonferenze γ, β_a, β_d coincidono. (La cosa non può verificarsi per entrambe le posizioni possibili di M se i punti $ABCD$ sono distinti). La condizione equivale ancora a queste di verifica più immediata: che i lati opposti del quadrilatero $ABCD$ siano ipotenuse di triangoli rettangoli isosceli aventi lo stesso vertice; e cioè che i segmenti AC e BD siano perpendicolari e uguali.

Il problema di determinare un poligono regolare i cui lati passino per punti assegnati è indeterminato per il caso del triangolo: è più che determinato per i poligoni di più di quattro lati. Ma per questi si può chiedere invece di *costruire un poligono regolare di* n *lati* ($n \geq 4$) *di cui quattro lati consecutivi passino per quattro punti assegnati del piano*: la risoluzione di questo problema non differirebbe che per poche varianti evidenti da quella qui esposta per il quadrato.

B. Levi

47. Siano A, B, C, D i quattro punti dati, e possiamo supporre anche che tre di questi e magari tutti e quattro siano allineati. Sia p un piano che li contiene (il piano che dovrà contenere il quadrato).

Indico con U il vettore che si ottiene da BD facendo ruotare di un angolo retto il piano p in un determinato verso.

Per ottenere il quadrato basta assumere il lato che passa per A parallelo ad uno dei vettori

(1) $$AC - U, \quad AC + U.$$

Distinguo tre casi.

1°. — I vettori

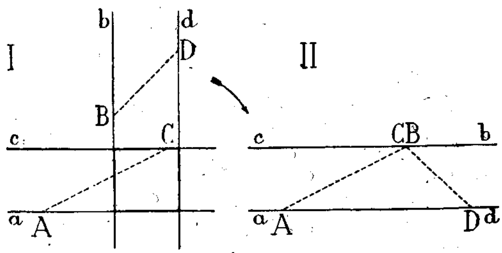
(2) $$AC \text{ e } BD$$

non sono fra loro perpendicolari.

2°. — I vettori (2) sono fra loro perpendicolari e hanno lunghezze diverse.

3°. — I vettori (2) sono fra loro perpendicolari ed hanno lunghezze uguali.

Nel 1° caso il problema ha *due* soluzioni distinte; nel 2° caso ne ha *una sola*, essa è data da un quadrato *nullo* (intersezione



Si passa dalla fig. I alla fig. II facendo ruotare la striscia bd di un angolo retto nel senso della freccia e poi sovrapponendola con una traslazione alla ac in modo che B cada su C.

delle rette AC e BD); nel 3° caso il problema ha *infinite* soluzioni, il lato per A può avere una qualunque direzione su p.

Nel caso 2° i vettori AC, U sono paralleli e di diversa lunghezza, nel caso 3° sono paralleli e di uguale lunghezza.

La dimostrazione di questi risultati scende da facili considerazioni sulla figura.

Giuseppe Vitali

Un' altra risposta al n. 47, non però esauriente, ci è pervenuta dal Sig. Colonnello O. Resta.