Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Armando Chiellini

Sull'integrazione dell'equazione differenziale $y' + Py^2 + Qy^3 = 0$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 301–307.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_301_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sull' integrazione dell' equazione differenziale $y' + Py^2 + Qy^3 = 0$.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Cagliari).

Sunto. - *L' Autore determina in questo lavoro un caso abbastanza generale di integrazione dell' equazione differenziale* $y' + Py^2 + Qy^3 = 0$ *e mostra come in esso siano contenuti alcuni casi elementari precedentemente considerati da altri e dall' Autore stesso.*

1. In un vecchio numero di una rivista matematica spagnola [1], si proponeva di integrare l' equazione differenziale

$$y' + Py^2 + Qy^3 = 0 \tag{1}$$

con P, Q funzioni date di x, finite, continue e derivabili, soddisfacenti alla condizione

$$P'Q - PQ' = Q^3,$$

dove gli apici sono indice di derivazione.

Non credo privo di interesse mostrare come questo caso ed altri, che anch' io ero riuscito a trovare volta per volta, rientrino come casi particolari in quello abbastanza generale che mi propongo appunto di esporre.

[1] « Revista de la Sociedad Matematica Espanola », anno IV, n. 37 (1915).

Eseguiamo a questo scopo nella (1) la sostituzione

$$y = \alpha z + \alpha, \tag{2}$$

con α opportuna funzione della x, ed avremo

$$\begin{aligned}\alpha z' + Q\alpha^3 z^3 + (3Q\alpha^3 + P\alpha^2)z^2 + (3Q\alpha^3 + 2P\alpha^2 + \alpha')z + \\ + (Q\alpha^3 + P\alpha^2 + \alpha') = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

ed osserviamo che se in questa i varii coefficienti delle potenze di z differissero tra loro per fattori costanti, la (3) si ridurrebbe immediatamente a variabili separate. Infatti se esistessero tre numeri m, p, q per cui fosse

$$\left\{\begin{aligned} 3Q\alpha^3 + P\alpha^2 \qquad &= mQ\alpha^3 \\ 3Q\alpha^3 + 2P\alpha^2 + \alpha' &= nQ\alpha^3 \\ Q\alpha^3 + P\alpha^2 + \alpha' &= pQ\alpha^3 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

la (3) si ridurrebbe senz'altro all'altra

$$\frac{dz}{z^3 + mz^2 + nz + p} + Q\alpha^2 dx = 0 \tag{5}$$

che appunto è un'equazione a variabili separate.

Prendiamo allora in esame le equazioni di condizione (4); risulta facilmente che tra m, n, p deve passare un legame; infatti sottraendo membro a membro le ultime due otteniamo

$$2Q\alpha^3 + P\alpha^2 = (n - p)Q\alpha^3$$

che confrontata con la prima ci da la condizione $n - p + 1 = m$, cioè

$$p = n + 1 - m.$$

Supposta allora verificato ciò, le (4) si riducono alle seguenti

$$\left\{\begin{aligned} 3Q\alpha + P \qquad &= mQ\alpha \\ 3Q\alpha^3 + 2P\alpha^2 + \alpha' &= nQ\alpha^3; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

ricavando α dalla prima si ha

$$\alpha = \frac{P}{(m-3)Q},$$

da cui, derivando e sostituendo nella seconda delle (6), otteniamo

$$P'Q - PQ' = \frac{n - 2m + 3}{(m-3)^2} P^3$$

dove m, n sono costanti arbitrarie.

Concludendo possiamo quindi enunciare il risultato:

L'equazione differenziale

$$y' + Py^2 + Qy^3 = 0,$$

nel caso che tra P *e* Q *interceda la relazione*

$$P'Q - PQ' = \frac{n - 2m + 3}{(m - 3)^2} P^3, \tag{I}$$

si integra con la sostituzione

$$y = \frac{P(z + 1)}{(m - 3)Q}, \tag{II}$$

riducendosi all'equazione differenziale a variabili separate

$$\frac{dz}{z^3 + mz^2 + n2 + n - m + 1} + \frac{P^2 dx}{(m - 3)^2 Q} \tag{7}$$

dove m, n *sono costanti.*

Osservando poi l'identità

$$z^3 + mz^2 + nz + n - m + 1 = (z + 1)(z^2 + [m - 1]z + n - m + 1),$$

possiamo anche scrivere la (7) sotto la forma più semplice

$$\frac{dz}{1 + z} + \frac{(2 - m - z)dz}{z^2 + (m - 1)z + n - m + 1} = \frac{2m - 3 - n}{(m - 3)^2} \frac{P^2 dx}{Q} \tag{7$_1$}$$

nella quale la quadratura del primo membro è immediata.

2. Risultati del tutto analoghi si ottengono con la sostituzione

$$y = \varkappa z - \bar{\alpha},$$

come risulta dal seguente enunciato:

L'equazione differenziale

$$y' + Py^2 + Qy^3 = 0,$$

nel caso che tra P *e* Q *interceda la relazione*

$$P'Q - PQ' = \frac{n + 2m + 3}{(m + 3)^2} P^3 \text{ (}^2\text{)} \tag{I$_1$}$$

si può integrare con la sostituzione

$$y = \frac{P(z - 1)}{(m + 3)Q}, \tag{II$_1$}$$

(2) Sostanzialmente identica alla (I).

riducendosi all'equazione differenziale a variabili separate

$$\frac{dz}{z^3+mz^2+nz-m-n-1}+\frac{P^2dx}{(m+3)^2Q}=0 \tag{8}$$

con m, n *costanti.*

Osservando poi l'identità

$$z^3+mz^2+nz-m-n-1=(z-1)(z^2+[m+1]z+m+n+1),$$

possiamo anche scrivere la (8) sotto la forma più semplice

$$\frac{dz}{z-1}-\frac{(2+m+z)dz}{z^2+(m+1)z+m+n+1}=-\frac{(2m+3+n)}{(m+3)^2}\frac{P^2dx}{Q}.$$

Osservazione. — In altre parole, da ciò che precede possiamo dire che l'equazione differenziale (1) si sa integrare senz'altro se l'espressione

$$P'Q-PQ'$$

differisce da P^3 per un fattore costante, che possiamo indicare con K. Allora poi, se mettiamo K sotto una delle due forme

$$\frac{n+3-2m}{(m-3)^2},\quad \frac{n+3+2m}{(m+3)^2}, \tag{III}$$

la sostituzione necessaria per l'integrazione è rappresentata dalla (II) o dalla (II_1).

Osserviamo inoltre che le (III), si possono ottenere in infiniti modi; possiamo per esempio scrivere, a seconda dei casi

$$\begin{cases} n=K(m-3)^2+2m-3 \\ n=K(m+3)^2-2m-3 \end{cases} \tag{III_1}$$

e scelto m (purchè diverso da 3 o -3), determinare n in conseguenza.

Notiamo infine che risolvendo la (I) o (I_1) rispetto a Q, oppure rispetto a P, otteniamo rispettivamente

$$Q=-P\left\{K\int Pdx+\text{cost}\right\},\quad \frac{1}{P}=Q\sqrt{\text{cost.}-2K\int\frac{dx}{Q^2}}.$$

3. Facciamo ancora le seguenti considerazioni di carattere generale: Dato l'equazione differenziale (1), resta pienamente determinata la costante K (quando naturalmente questa esiste), ed allora ci possiamo proporre di vedere come vadano fissate le quantità m, n, tanto nel primo che nel secondo caso, affinchè risulti per essi lo stesso α. Indicando con m, n e μ, ν le costanti per i due casi, avremo le formule

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{P}{(m-3)Q} & \bar{\alpha} = \dfrac{P}{(\mu+3)Q} \\ n = K(m-3)^2 + 2m - 3 & \nu = K(\mu+3)^2 - 2\mu - 3 \end{cases}$$

e quindi senz'altro

$$\mu = m - 6, \quad \nu = K(m-3)^2 - 2m + 9 = n - 4m + 9.$$

Oppure possiamo proporci di ricercare quali valori si debbano dare a μ, affinchè risulti $\nu = n$; oltre il caso evidente di $\mu = -m$ (con cui risulta $\bar{\alpha} = -\alpha$) si ottiene

$$\mu = \frac{2}{K} + m - 6 = \frac{mn + 3m - 6n}{n + 3 - 2m}$$

per cui

$$\bar{\alpha} = \frac{(n + 3 - 2m)P}{(m-3)(n-3)Q}.$$

4. Esaminiamo ora alcuni casi particolari notevoli:

a) La risoluzione proposta nella citata rivista spagnola, corrisponde al caso di $K = 1$; introducendo questo valore nelle (III_1) e facendo m rispettivamente uguale ad 1 e a -2, otteniamo $n = 1$, 2 e quindi:

L'equazione differenziale

$$y' + Py^2 + Qy^3 = 0$$

se tra P e Q esiste la relazione

$$P'Q - PQ' = P^3$$

si può integrare con l'una o l'altra delle sostituzioni

$$y = -\frac{P(z+1)}{2Q}, \quad y = \frac{P(z-1)}{Q},$$

riducendosi rispettivamente all'uno o all'altra delle due equazioni differenziali

$$\frac{dz}{z+1} + \frac{(1-z)dz}{1+z^2} = -\frac{P^2dx}{2Q}$$

$$\frac{dz}{z+1} - \frac{zdz}{z^2-z+1} = -\frac{P^2dx}{Q}$$

i cui integrali generali sono

$$\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2}+2\,\mathrm{arctg}\,z=-\int\frac{P^2dx}{Q}+\mathrm{cost}$$

$$\log\frac{z-1}{\sqrt{z^2-z+1}}-\frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}}=-\int\frac{P^2dx}{Q}+\mathrm{cost}.$$

b) Facciamo il caso di $K=\frac{2}{9}$ e di $m=0$: le (III_1) ci dànno $n=-1$ e quindi l'equazione differenziale:

$$y'+Py^2+Qy^3=0,$$

se tra P e Q esiste la relazione

$$P'Q-PQ'=\frac{2P^3}{9},$$

si può integrare con l'una o l'altra delle due sostituzioni

$$y=-\frac{P(z+1)}{3Q},\quad y=\frac{P(z-1)}{3Q}$$

riducendosi all'una o all'altra delle due equazioni differenziali

$$(9)\qquad\begin{cases}\dfrac{dz}{z+1}+\dfrac{(2-z)dz}{z(z-1)}=-\dfrac{2}{9}\dfrac{P^2dx}{Q}\\[2mm]\dfrac{dz}{z-1}-\dfrac{(2+z)dz}{z(z+1)}=-\dfrac{2}{9}\dfrac{P^2dx}{Q}\end{cases}$$

il cui integrale generale *comune* è

$$\log\frac{z^2-1}{z^2}=-\frac{2}{9}\int\frac{P^2dx}{Q}+\mathrm{cost}\ \text{[3]}.$$

Osserviamo inoltre che le (9) si possono ridurre anche alla se-

[3] Ciò è naturale in quanto, cambiando z in $-z$, le (9) si cambiano l'una nell'altra e l'integrale contiene solo z^2. In generale si passa dalla (7), relativa alla sostituzione (II), alla (8), relativa alla sostituzione (II_1), con il cambiamento di funzione

$$z+1=\frac{m-3}{m+3}(\zeta-1);$$

per $m=0$, si ha appunto $z=-\zeta$.

guente equazione di BERNOUILLI:

$$z' + \frac{P^2 z^3}{9Q} - \frac{P^2 z}{9Q} = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

c) Il caso di $K = 0$ non ha importanza in quanto, con questa ipotesi, già l'equazione (1) di partenza è a variabili separate; infatti, poichè si ha

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2},$$

risulta $\frac{d}{dz}\left(\frac{P}{Q}\right) = 0$, cioè $P = hQ$ (con h costante) ed introducendo nella (1):

$$y' + hQy^2 + Qy^3 = 0$$

cioè

$$\frac{dy}{y^2(h + y)} + Qdx = 0.$$

[1] La condizione $P'Q - PQ' = \frac{2P^3}{9}$ l'avevo anche trovata cercando di integrare la (1) mediante la sostituzione $y = z + \alpha$ e riconducendo poi l'equazione trasformata ad una di BERNOUILLI. È anzi stato questo il fatto che mi fece sospettare la possibilità di risolvere la (1), tutte le volte che l'espressione $P'Q - PQ'$ differisce da P^3 per un fattore costante.