Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Silvio Cinquini

Sopra un'equazione funzionale di ordine infinito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 297–301.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_297_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sopra un'equazione funzionale di ordine infinito.

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - *I risultati ottenuti, seguendo il metodo stabilito dal prof.* PINCHERLE *nella Memoria* Sopra alcuni nuclei analitici, *nella mia precedente Nota* Sopra un'equazione funzionale *si possono estendere, sotto opportune condizioni, ad un' operazione integrale analitica, che ha come caso particolare quella da me già considerata. Se ne deduce la risoluzione di un'equazione funzionale di ordine infinito.*

In una Nota precedente [1] ho dimostrato che assumendo come nucleo l'espressione

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha_n(x)}{[y-\beta(x)]^{n+1}}$$

si dà origine, sotto opportune ipotesi, ad un' operazione integrale analitica normale, del tipo stesso di quelle già considerate [2] dal

[1] S. CINQUINI, *Sopra un'equazione funzionale.* « Bollettino della Unione Matematica Italiana », 1930, n. 2, pag. 63.

[2] S. PINCHERLE, *Sopra alcuni nuclei analitici.* « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna - Classe di Scienze Fisiche », 1915-16, vol. XX.

prof. S. PINCHERLE, e per la quale sono validi tutti i risultati stabiliti dallo stesso Autore per tali operazioni.

In un recente Articolo [3] il sig. R. BADESCU, basandosi invece su risultati relativi al problema dell'iterazione [4] (dovuti ai sigg. FATOU e JULIA) considera un tipo di nuclei più generali di (1); però composti di un numero finito di termini e si propone infine di ritornare sull'argomento per studiare il caso di nuclei rappresentati da serie uniformemente convergenti.

Avendo notato che il metodo del prof. PINCHERLE e le mie ulteriori ricerche hanno interessato il sig. BADESCU, mi propongo di far vedere che, basandosi sul metodo stesso, da me già seguito nella mia precedente nota, tutti i risultati contenuti in questa possono estendersi, sotto opportune condizioni, al caso in cui il nucleo sia costituito da un'espressione del tipo (1), in cui figurino però infiniti termini.

1. Considero l'espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{[y - \beta(x)]^{n+1}} \tag{2}$$

ove

$$\alpha_n(x) = \sum_{s=n}^{\infty} a_{ns} x^s, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\beta(x) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s$$

sono serie di potenze aventi un raggio P comune di convergenza; è

$$a_{00} \neq 0; \quad 0 < |b_1| < 1:$$

ed inoltre esiste un numero R positivo minore di P, tale che indicato con M_n il massimo modulo di $\alpha_n(x)$ sulla circonferenza (R) risulta

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{M_n} < R(1 - |b_1|) \text{ [5]}.$$

[3] R. BADESCU, *Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1931, n. 4, pag. 217.

[4] Devo soggiungere che anche nella Memoria citata in [2], (vedasi i nn. 8, 9, 10) il prof. PINCHERLE ha stabilito interessanti risultati, riguardanti l'argomento che si tratta, per mezzo dell'iterazione.

[5] Queste condizioni, p. es., sono soddisfatte se è

$$\alpha_n(x) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{x^s}{(a+n)^s},$$

con $a \neq 0$, qualunque sia b_1.

Sotto queste ipotesi, supposti i piani-sfera delle due variabili x *e* y *sovrapposti, si può determinare una corona circolare tale, che comunque presi in essa* x *e* y, *l'espressione* (2) *definisce una funzione* K(x, y) *analitica regolare delle due variabili* x *e* y, *e questa funzione, assunta come nucleo, dà origine ad un'operazione integrale analitica regolare normale.*

Infatti, se m è il massimo modulo di $\beta(x)$ in (R), per il teorema del valor maggiorante risulta

$$|\beta(x)| \leq |b_1 x| + \frac{m\,|x|^2}{R^2 - R\,|x|}.$$

Scelto allora un numero b compreso fra $|b_1|$ e 1 e tale inoltre che sia

$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{M_n} < R(1-b)$$

si soddisferà alla condizione

$$|\beta(x)| < b\,|x|,$$

per

$$|x| < \frac{R^2(b - |b_1|)}{m + (b - |b_1|)R} \equiv \bar{r}.$$

Preso un numero positivo $r < \begin{cases} \bar{r} \\ R \end{cases}$ e un numero $r_1 < r$ in modo che sia

$$\frac{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{M_n} + Rb}{R}\, r \leq r_1 \tag{3}$$

dico che (r_1, r) è la corona circolare richiesta.

Entro tale corona circolare l'espressione (2) è uniformemente convergente; infatti, considerati gli x e y appartenente ad (r_1, r), risulta per la (3)

$$|\beta(x)| < b\,|x| < br < r_1, \tag{4}$$

onde, considerata la serie dei moduli della (2), si ha per il teorema del valor maggiorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n(x)|}{|y - \beta(x)|^{n+1}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{s=n}^{\infty} |a_{ns}|\,|x|^s}{[\,|y| - b\,|x|\,]^{n+1}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{s=n}^{\infty} \frac{M_n\,|x|^s}{R^s}}{(r_1 - br)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n\,|x|^n}{R^n (r_1 - br)^{n+1}\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n\,|x|^n}{R^n (r_1 - br)^{n+1}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}.$$

Considerato il termine generale di quest'ultima serie maggiorante si ha per la (3)

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{M_n}{R^n (r_1 - br)^{n+1}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}} = \frac{\overline{\lim}\, M_n}{R(r_1 - br)} < \frac{1}{r};$$

per il teorema di CAUCHY-HADAMARD r è il raggio di convergenza della serie maggiorante. e quindi « a fortiori » la (2) risulta uniformemente convergente in (r_1, r).

Si osservi ora che l'espressione (2) può scriversi in (r_1, r) (cfr. n. 1 dell'altra mia nota)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} \frac{[b_1{}^p x^p + d_{p,p+1} x^{p+1} + d_{p,p+2} x^{p+2} + \dots]}{y^{p+n+1}};$$

siccome per x preso in (r_1, r) anche le $\alpha_n(x)$ sono uniformemente convergenti, i prodotti $\alpha_n(x) \sum_{p=0}^{\infty} \dots$ possono eseguirsi termine a termine e la serie di serie così ottenuta, e della quale è già provata l'uniforme convergenza, può ordinarsi in un'unica serie che è ancora uniformemente convergente per tutte le coppie x, y prese entro (r_1, r).

Resta così provato che l'espressione (2) definisce nella corona circolare (r_1, r) una funzione analitica regolare $K(x, y)$, il cui sviluppo in serie è

$$K(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} b_1{}^{\nu-n} a_{nn} \right] + C_{\nu,\nu+1} x + C_{\nu,\nu+2} x^2 + \dots \right\}}{y^{\nu+1}}. \tag{5}$$

Risulta inoltre dall'esistenza della corona (r_1, r) che l'operazione integrale analitica definita dalla funzione K è regolare, e, dalla forma dello sviluppo in serie (5), che è anche normale.

Il teorema enunciato è quindi completamente provato.

2. Assunta la funzione (2) come nucleo in base al teorema precedente valgono per essa tutti i risultati stabiliti dal prof. PINCHERLE per i nuclei analitici regolari normali [6] (riassunti nel n. 2 dell'altra mia nota) e in particolare i tre teoremi di FREDHOLM.

I valori caratteristici sono dati dalla successione

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} b_1{}^{\nu-n} a_{nn}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

[6] Vedasi luogo citato in [2], nn. 1-6.

3. Le considerazioni dei numeri precedenti permettono (cfr. n. 3 dell'altra mia nota) di ricondurre lo studio dell'equazione funzionale di ordine infinito

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \varphi^{(n)}[\beta(x)] = f(x)$$

(in cui le $\alpha_i (i = 0, 1, 2, ...)$ e β sono le funzioni indicate al n. 1; f è una funzione analitica regolare per $x = 0$, e φ è funzione incognita) a quello dell'equazione integrale lineare

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{(l)} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

dove (l) è una curva regolare semplice, chiusa, tutta contenuta nella corona circolare (r_1, r) e comprendente nel suo interno il cerchio (r_1).