Giulio Krall

Spiegazione energetica della tendenza al parallelismo degli assi di rotazione di due corpi gravitanti e rotanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 283–287.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

Spiegazione energetica della tendenza al parallelismo degli assi di rotazione di due corpi gravitanti e rotanti.

Nota di GIULIO KRALL (a Roma).

Sunto. - *Ricollegando l'effetto delle maree sul moto kepleriano di due corpi celesti rotanti ad una azione dissipativa dell'energia totale, si dimostra che, necessariamente, gli assi di rotazione tendono al parallelismo disponendosi in pari tempo normali al piano dell'orbita.*

§ 1. **Introduzione.** — È dovuta ad un suggerimento di KELVIN, una giustificazione semplice ed espressiva data dal DARWIN al risultato, cui egli stesso era già pervenuto per vie non del tutto immediate, concernente l'asintotica tendenza all'eguaglianza dei periodi di rotazione e rivoluzione di due corpi (Terra-Luna) gravitanti e rotanti.

Secondo tale spiegazione, la causa d'un siffatto armonioso disporsi del moto di due corpi celesti si riconduce all'effetto dissipativo dell'energia legato alle maree, intese, sia nel senso usuale come provenienti da oceani, sia come solide, cioè dovute a deformazioni elastiche dei nuclei.

Effetto dissipativo che, non compensato, (p. es. da eventuali raffreddamenti e conseguenti contrazioni dei nuclei) fa necessariamente tendere, sia pure lentissimamente, ad un minimo l'energia totale E del sistema (costituito dai due corpi suddetti): precisamente la somma della energia cinetica, dovuta al moto orbitale e di rotazione, con quella posizionale che deriva dalla mutua attrazione newtoniana. Orbene, condizione di questo minimo, subordinato, trattandosi di azioni interne, alla conservazione del momento totale K delle quantità di moto (orbitale e di rotazione) e raggiunto, come tosto vedremo ancor più speditamente di quanto non l'abbia fatto il DARWIN stesso, è appunto l'eguaglianza, prima rilevata, tra i periodi di rivoluzione e quelli di rotazione.

La ricerca del DARWIN però, anche nella nuova impostazione energetica considera soltanto il caso particolare in cui gli assi di rotazione sono normali al piano dell'orbita, ritenuta, e ciò come condizione essenziale, circolare per tutto lo svolgersi del fenomeno.

Or noi ci proponiamo, dopo aver ripresa, ed in certo modo resa più agile, la trattazione del DARWIN, di far vedere come, *per effetto delle maree, ove inizialmente gli assi di rotazione sieno comunque orientati, questi, a lunga scadenza, vanno a disporsi nor-*

mali al piano dell'orbita. Il quale, a sua volta, si pone normale all'invariante momento vettoriale totale delle quantità di moto, fermo restando, s'intende, il risultato già noto concernente l'eguaglianza dei periodi di rotazione e rivoluzione.

Manterremo però ancora la restrizione qualitativa di orbite circolari, rilevando che, il caso più generale, di orbite elittiche, richiede, non si vuol dire però *necessariamente*, l'introduzione, per la prima volta indicata dal LEVI-CIVITA, di nuovi criteri, specifici della meccanica statistica, su cui non vogliamo qui soffermarci.

§ 2. Caso del Darwin. Assi di rotazione normali al piano dell'orbita. — Ciò posto, consideriamo due pianeti aventi ciascuno un asse di simmetria, di masse m, m'; momenti d'inerzia assiali I, I'. Sia, e ciò senza pregiudizio alcuno della generalità, ma unicamente per sveltire quanto è possibile gli sviluppi formali, m di gran lunga superiore ad m', talchè il baricentro (immobile) delle due masse cada pressapoco in m, che potremo quindi ritenere fermo o pressochè. Designando allora con r il raggio dell'orbita, con $\dot\vartheta$; $\dot\psi$, $\dot\psi'$ le velocità angolari di rivoluzione e di rotazione (attorno ad assi normali al piano di questa), infine con f la costante d'attrazione, l'energia totale E del sistema, costituito dai due corpi di cui si tratta, varrà

$$E = \frac{1}{2} m r^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}(I\dot\psi^2 + I'\dot\psi'^2) - f\frac{mm'}{r}. \tag{1}$$

Accanto a codesta espressione, *integrale* del sistema differenziale che regge il fenomeno, sussiste ancora quella esprimente l'invarianza del momento totale delle quantità di moto. Il quale, ove si designi con c la costante delle aree,

$$c = r^2\dot\vartheta$$

ed infine con

$$p_\psi = I\dot\psi, \quad p_{\psi'} = I'\dot\psi'$$

i singoli momenti dovuti alle rotazioni; trattandosi, per le convenzioni fatte, di vettori paralleli, si traduce nell'unica equazione scalare

$$m'c + p_\psi + p_{\psi'} = K, \tag{2}$$

K designando una costante che non si può variare con sole azioni interne sieno queste di qualunque natura si vuole.

Sostituendo nell'espressione (1) di E, le velocità angolari per mezzo dei rispettivi momenti c, p_ψ e $p_{\psi'}$ e, attraverso la (2), anche c

(con che si introduce K), otteniamo per la E da render minima, indipendentemente ormai da qualsiasi condizione,

$$(1\text{-a}) \qquad E = \frac{1}{2}\frac{(K - p_\psi - p_{\psi'})^2}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_\psi^2}{I} + \frac{p_{\psi'}^2}{I'}\right) - f\frac{mm'}{r}.$$

Riguardando ora come variabili rispetto alle quali va ricercato il minimo di E, le p_ψ e $p_{\psi'}$, ove si rilevi la possibilità di farle variare a priori in modo qualunque, sicchè non si presenta da considerare l'eventualità di estremi di frontiera, dovremo avere in condizioni di minimo,

$$\frac{\partial E}{\partial p_\psi} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial p_{\psi'}} = 0,$$

dunque, esplicitando,

$$-\frac{(K - p_\psi - p_{\psi'})}{r^2} + \frac{p_\psi}{I} = 0, \quad -\frac{(K - p_\psi - p_{\psi'})}{r^2} + \frac{p_{\psi'}}{I'} = 0.$$

Ovvero anche, riponendo c al posto di $K - p_\psi - p_{\psi'}$,

$$-\frac{c}{r^2} + \frac{p_\psi}{I} = 0, \quad -\frac{c}{r^2} + \frac{p_{\psi'}}{I'} = 0.$$

Poichè

$$\frac{c}{r^2} = \dot{\vartheta}, \quad \frac{p_\psi}{I} = \dot{\psi}, \quad \frac{p_{\psi'}}{I'} = \dot{\psi}',$$

si desumono in definitiva le due equazioni

$$\dot{\vartheta} = \dot{\psi} = \dot{\psi}'$$

definienti la proprietà asintotica che si voleva dimostrare.

§ 3. Caso degli assi di rotazione comunque orientati. — Passando ad estendere l'ambito di queste considerazioni, vogliamo ora consentire che gli assi di rotazione sieno comunque orientati rispetto al piano dell'orbita.

Varrà ancora, evidentemente con la stessa scrittura, l'integrale dell'energia dato dalla (1). L'integrale del momento totale delle quantità di moto però, non si lascia più esprimere con l'unica equazione scalare prima considerata; il carattere vettoriale deve necessariamente esser reso esplicito.

Precisamente, ove con n si indichi il versore normale al piano dell'orbita, con k e k' i versori coincidenti con gli assi di rotazione dei due corpi, si avrà

$$nc + kp_\psi + k'p_{\psi'} = K.$$

Traducendo nella forma scalare, ove si ponga con le solite notazioni

$$n \times \text{vers.}\, K = \cos\beta, \quad k \times \text{vers.}\, K = \cos\alpha, \quad k' \times \text{vers.}\, K = \cos\alpha',$$

β, α, α' designando quindi gli angoli che n, k, k' fanno con K, avremo

(2-a) $$c\cos\beta + p_\psi \cos\alpha + p_{\psi'} \cos\alpha' = K$$

e, se si vuole, due altre relazioni scalari (A) che non importa scrivere, esprimenti la circostanza manifesta che è nullo il componente di $nc + kp_\psi + k'p_{\psi'}$ in un piano normale a K, cioè a se stesso. È superfluo di tener conto della (A), in quanto esse introducono, si può dire, le orientazioni nel piano dell'orbita, delle proiezioni di k e k', orientazioni che non intervengono nella espressione di E.

Eliminando nella (1), $\dot{\vartheta}$ pel tramite di c, e c pel tramite della (2-a), otteniamo in luogo della (1-a),

$$E = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{K - p_\psi\cos\alpha - p_{\psi'}\cos\alpha'}{\cos\beta}\right)^2}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_\psi^2}{I} + \frac{p_{\psi'}^2}{I'}\right) - f\frac{mm'}{r}.$$

Procedendo alla ricerca del minimo di E, assumiamo come nuove variabili, accanto alle p_ψ, $p_{\psi'}$, gli angoli β, α, α'.

Troviamo allora immediatamente, dopo aver assicurata l'impossibilità di estremi di frontiera,

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0$$

con « a » definiente una delle 5 variabili or designate.

Esplicitando otteniamo,

$$-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\frac{c}{r^2} + \frac{p_\psi}{I} = 0, \qquad -\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta}\frac{c}{r^2} + \frac{p_{\psi'}}{I'} = 0,$$

$$\frac{p_\psi}{\cos\beta}\frac{c}{r^2}\sin\alpha = 0, \qquad \frac{p_{\psi'}}{\cos\beta}\frac{c}{r^2}\sin\alpha' = 0,$$

$$\frac{1}{\cos^2\beta}\frac{c}{r^2}\sin\beta = 0.$$

Esclusa la circostanza $p_\psi = p_{\psi'} = 0$, si desume $\alpha = \alpha' = \beta = 0$ o $=$ multipli di π e quindi di conseguenza, $\dot{\vartheta} = \dot{\psi} = \dot{\psi}'$; c. d. d.

Con che evidentemente risulta, in modo sorprendentemente semplice, dimostrata la tendenza al parallelismo degli assi di rotazione col vettore momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}$, normalmente a cui si dispone ($\beta = 0$) il piano dell'orbita come avevamo annunciato. Le condizioni $\dot{\vartheta} = \dot{\psi} = \dot{\psi}'$ esprimono infine, l'uguaglianza dei periodi di rotazione con quelli di rivoluzione, come naturalmente si poteva prevedere.

Concludendo, ci permetteremo di rilevare che, recentemente, in due note nei « Rendiconti dei Lincei » abbiamo dimostrato la tendenza a codesto stato finale indipendentemente da restrizioni quantitative tra le masse e qualitative delle orbite. Ma non insisteremo qui sui procedimenti allora usati, ricollegati alla nozione degli invarianti adiabatici che, tanto fecondamente fu dal LEVI-CIVITA introdotta in astronomia. Piuttosto osserveremo come la geniale osservazione del KELVIN è risultata capace d'una estensione quanto mai suggestiva a cui, con tale modestia di mezzi poteva sembrare assai improbabile il pervenire.