Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giovanni Sansone

Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 277–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_277_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.

Nota di G. SANSONE (a Firenze).

Sunto. - *L'A. dimostra che se* p_1, p_2, p_3 *sono costanti reali, gli integrali dell' equazione*

$$y^{(3)} + p_1 y^{(2)} + \lambda p_2 y^{(1)} + \lambda p_3 y = 0$$

nulli in due punti a *e* b, *quando il parametro* λ *diverge* a $+\infty$, *oppure* a $-\infty$, *hanno carattere oscillatorio nell' intervallo* (a, b).

In due note precedenti, direttamente [1] e come caso particolare di un teorema generale [2], abbiamo dimostrato che data l' equazione

$$y^{(3)} + p_1 y^{(2)} + \lambda p_2 y^{(1)} + \lambda p_3 y = 0 \tag{1}$$

con p_1, p_2, p_3 costanti reali, $p_2^2 + p_3^2 \neq 0$, λ parametro reale, fissati comunque tre punti distinti, esistono infiniti valori del parametro λ

[1] G. SANSONE, *Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine, lineari omogenee a coefficienti costanti.* [« Rend. Ist. Lombardo », LXII, (1929), pp. 683-92].

[2] G. SANSONE, *Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie, lineari omogenee a coefficienti costanti.* [« Rend. Cir. Mat. di Palermo ». LV, (1931), pp. 168-76].

[autovalori] ai quali corrispondono integrali $y(x, \lambda)$ dell'equazione (1), non identicamente nulli, che si annullano nei tre punti prefissati.

Supponiamo che gli autovalori dell'equazione (1) *abbiano per valore limite* $+\infty$, *e dimostriamo che fissati comunque due punti* a *e* b, $a > b$, *e scelto nell'intervallo* (a, b) *un intervallo* (ξ_1, ξ_2) *arbitrario,* $\xi_1 < \xi_2$, *esiste un numero* λ_0 *tale che per tutti i valori del parametro* $\lambda > \lambda_0$ [3] *gli integrali* $y(x, \lambda)$ *della* (1) *che si annullano in* a *e in* b *hanno almeno uno zero in* (ξ_1, ξ_2) [4].

Nel seguito senza alterare le generalità supponiamo $a = 0$, $b = 1$, basterà caso mai effettuare nella (1) la sostituzione $x = a + t(b - a)$.

Possiamo anche supporre (ξ_1, ξ_2) intèrno a $(0, 1)$ e perciò $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

Infine poichè le costanti p_2 e p_3 non sono entrambe nulle, salvo a mutare λ in $-\lambda$ possiamo supporre una di esse positiva, e noi per la dimostrazione distingueremo tre casi:

1) $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 > 0$; 2) $p_2 > 0$, $p_1^2 + p_3^2 \neq 0$; 3) $p_2 = 0$, $p_3 > 0$.

1 CASO: $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 > 0$.

L'equazione (1) assume la forma:

$$y^{(3)} + \lambda p_2 y^{(1)} = 0 \tag{2}$$

e se λ è un autovalore reale, l'equazione caratteristica $\rho^3 + \lambda p_2 \rho = 0$ deve avere una radice reale e due complesse e coniugate [5], gli autovalori sono quindi positivi e il loro valore limite è $+\infty$.

Con $\lambda > 0$ l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della (2) ha l'espressione $c_1 \cos\sqrt{\lambda p_2}\, x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda p_2}\, x + c_3$ e l'annullarsi di esso nel punto 0 [6] porta che $y(x, \lambda)$ ha la forma

$$y(x, \lambda) = 2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda p_2}}{2} x \left[c_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda p_2}}{2} x - c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda p_2}}{2} x \right] \tag{3}$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

(3) Quando gli autovalori abbiano per valore limite $-\infty$, alla disuguaglianza $\lambda > \lambda_0$ sostituiremo l'altra $\lambda < \lambda_0$; se gli autovalori hanno per valori limiti $+\infty$ e $-\infty$ [cfr. n. 3] sostituiremo l'altra $|\lambda| > \lambda_0$.

(4) Per le equazioni del secondo ordine cfr. *a*) M. PICONE, *Corso di Analisi Superiore* (« Circ. Mat. di Catania », 1923) f. I, p. 94 e seg.; *b*) G. MAMMANA, *Sopra un nuovo studio delle equazioni differenziali lineari* [« Math. Zeitschrift »; Bd. 25, (1926), (pp. 734-48), p. 743].

(5) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. (2), p. 688.

(6) In questo caso particolare basta considerare gli integrali della (2) nulli in un punto assegnato, e si può anche scegliere arbitrariamente l'intervallo (ξ_1, ξ_2).

Se λ soddisfa la disuguaglianza

$$(4)\qquad \frac{\sqrt{\lambda p_2}}{2}\xi_2 - \frac{\sqrt{\lambda p_2}}{2}\xi_1 > \pi$$

quando x varia tra ξ_1 e ξ_2, esisterà almeno un valore $\bar{x}$ tale che $\sqrt{\lambda p_2}\,\bar{x}/2 = l\pi$ con l intero, e quindi per la (3), $y(\bar{x}, \lambda) = 0$.

Si soddisfa la (4) prendendo $\lambda > \lambda_0$ con $\lambda = p_2^{-1}[2\pi/(\xi_2 - \xi_1)]^2$; abbiamo così dimostrato che per ogni valore di $\lambda > \lambda_0$ l'integrale della (2) nullo in un punto ha almeno uno zero in (ξ_1, ξ_2).

2 Caso: $p_2 > 0$, $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$. $[a = 0,\ b = 1]$.

Per ogni autovalore dell'equazione (1) dovrà risultare negativo il discriminante della sua equazione caratteristica

$$(5)\qquad \rho^3 + p_1\rho^2 + \lambda p_2\rho + \lambda p_3 = 0.$$

ciò porta che gli autovalori soddisfano la disuguaglianza

$$-4p_2\lambda^3 + (p_1^2 p_2^2 + 18 p_1 p_2 p_3 - 27 p_3^2)\lambda^2 - 4p_1^3 p_3 \lambda < 0,$$

perciò essi, quando abbiano valore assoluto sufficientemente grande, sono positivi e il loro limite è $+\infty$.

Se λ è positivo sufficientemente grande, le tre radici della (5) hanno la forma

$$\gamma_1(\lambda) + i\gamma_2(\lambda) \quad \gamma_1(\lambda) - i\gamma_2(\lambda) \quad \gamma_3(\lambda) \quad [i \text{ unità immaginaria}]$$

con $\gamma_1(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda)$, $\gamma_3(\lambda)$ funzioni continue di λ,

$$(6)\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_1(\lambda) = \frac{1}{2}\left[-p_1 + \frac{p_3}{p_2}\right],\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_2(\lambda) = +\infty,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_3(\lambda) = -\frac{p_3}{p_2}.$$

L'integrale generale della (1) ha la forma [7]

$$y(x, \lambda) = c_1 e^{\gamma_1 x}\cos\gamma_2 x + c_2 e^{\gamma_1 x}\,\mathrm{sen}\,\gamma_2 x + c_3 e^{\gamma_3 x}$$

con c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie, e l'annullarsi di esso nei punti 0, 1 porta

$$1c_1 + 0c_2 + 1c_3 = 0,\quad c_1 e^{\gamma_1}\cos\gamma_2 + c_2 e^{\gamma_1}\,\mathrm{sen}\,\gamma_2 + c_3 e^{\gamma_3} = 0,$$

e noi andremo a verificare che la matrice dei coefficienti

$$(7)\qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ e^{\gamma_1}\cos\gamma_2 & e^{\gamma_1}\,\mathrm{sen}\,\gamma_2 & e^{\gamma_3} \end{matrix} \right\|$$

per λ sufficientemente grande ha la caratteristica 2.

[7] Per comodità scriveremo γ_1, γ_2, γ_3 in luogo di $\gamma_1(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda)$, $\gamma_3(\lambda)$.

Infatti, perchè la (7) abbia caratteristica 1 occorre e basta si abbia

$$\gamma_2 = 2l\pi \text{ con } l \text{ intero}, \quad \gamma_1 = \gamma_3$$

cioè le radici della (5) debbono avere la forma

$$\gamma_1 + i\gamma_2 \quad \gamma_1 - i\gamma_2 \quad \gamma_1$$

e queste soddisferanno la (5) ove si abbia $\gamma_1 = -p_1/3$ e

$$p_1^3 + 9p_1\gamma_2^2 = 27\lambda p_3, \quad p_1^2 + 3\gamma_2 = 3\lambda p_2.$$

Da queste si ha

$$9(p_1p_2 - 3p_3)\lambda = 2p_1^3 \tag{8}$$

quindi per $p_1p_2 - 3p_3 \neq 0$, quando sia $\lambda > 2p_1^3/9(p_1p_2 - 3p_3)$, la matrice (7) ha la caratteristica 2; se poi $p_1p_2 - 3p_3 = 0$ la (8) è possibile soltanto per $p_1 = p_3 = 0$ e questo è il caso esaminato prima nel n. 1.

Adunque per λ sufficientemente grande la (7) ha la caratteristica 2 e l'integrale della (1) nullo nei punti 0, 1 ha la forma

$$y(x, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ e^{\gamma_1} \cos\gamma_2 & e^{\gamma_1} \operatorname{sen}\gamma_2 & e^{\gamma_3} \\ e^{\gamma_1 x} \cos\gamma_2 x & e^{\gamma_1 x} \operatorname{sen}\gamma_2 x & e^{\gamma_3 x} \end{vmatrix}$$

ovvero l'altra

$$y(x, \lambda) = \begin{vmatrix} \cos\gamma_2 - e^{\gamma_3 - \gamma_1} & \operatorname{sen}\gamma_2 \\ \cos\gamma_2 x - e^{(\gamma_3 - \gamma_1)x} & \operatorname{sen}\gamma_2 x \end{vmatrix} e^{(1+x)\gamma_1}. \tag{9}$$

La discussione ora fatta sulla caratteristica della matrice (7) ci assicura che per λ sufficientemente grande la differenza $\gamma_1(\lambda) - \gamma_3(\lambda)$ non è mai nulla e per la continuità essa avrà sempre lo stesso segno; quindi nel determinante che figura nel secondo membro della (9) per λ sufficientemente grande si avrà sempre $\gamma_1(\lambda) - \gamma_3(\lambda) > 0$ oppure sempre $\gamma_1(\lambda) - \gamma_3(\lambda) < 0$.

Osserviamo anche che avendosi $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \gamma_2(\lambda) = +\infty$, può determinarsi un λ_0 tale che per $\lambda > \lambda_0$ risulti

$$\gamma_2\xi_2 - \gamma_2\xi_1 > 3\pi. \tag{10}$$

si ha da qui che *scelto un qualunque* $\lambda \geq \lambda_0$ quando x varia tra ξ_1 e ξ_2 vi sono almeno due valori di x che indichiamo con x_1, x_2 tali che

$$\gamma_2 x_1 = 2l\pi \quad \gamma_2 x_2 = (2l + 1)\pi$$

con l intero: per tali valori avremo dalla (9)

$$y(x_1, \lambda) = \left[e^{(\gamma_3-\gamma_1)x_1} - 1\right] e^{(1+x_1)\gamma_1} \operatorname{sen} \gamma_2,$$
$$y(x_2, \lambda) = \left[e^{(\gamma_3-\gamma_1)x_2} + 1\right] e^{(1+x_2)\gamma_2}$$

e, supposto $\gamma_1 - \gamma_3 > 0$, questi due valori ove non siano nulli sono di segno contrario; ciò porta per la continuità di $y(x, \lambda)$ che quando x varia tra x_1 e x_2, $y(x, \lambda)$ si annulla [oltre che in 0 e in 1] almeno una volta in (x_1, x_2) e perciò almeno una volta in (ξ_1, ξ_2), e questa circostanza come abbiamo notato si verifica per ogni $\lambda > \lambda_0$.

Sia invece $\gamma_1 - \gamma_3 < 0$ e osserviamo che la (10) porta anche che, facendo variare x tra ξ_1 e ξ_2, vi sono almeno due valori di x che indichiamo con x_3 e x_4 tali che

$$\gamma_2 x_3 = \gamma_2 - 2m\pi \quad \gamma_2 x_4 = \gamma_2 - (2m + 1)\pi$$

con m intero; per tali valori avremo dalla (9)

$$y(x_3, \lambda) = \left[1 - e^{(\gamma_3-\gamma_1)(1-x_3)}\right] e^{\gamma_1 + \gamma_3 x_3} \operatorname{sen} \gamma_2$$
$$y(x_4, \lambda) = \left[1 + e^{(\gamma_3-\gamma_1)(1-x_4)}\right] e^{\gamma_1 + \gamma_3 x_4} \operatorname{sen} \gamma_2$$

e poichè $1 - e^{(\gamma_3-\gamma_1)(1-x_3)} < 0$ ne risulta che $y(x_3, \lambda)$, $y(x_4, \lambda)$ ove non siano nulli sono di segno contrario, quindi $y(x, \lambda)$ si annulla in (ξ_1, ξ_2) per tutti i valori di $\lambda > \lambda_0$.

3 Caso: $p_2 = 0$, $p_3 > 0$.

L'equazione

$$y^{(3)} + p_1 y^{(2)} + \lambda p_3 y = 0 \tag{11}$$

ha l'equazione caratteristica

$$\rho^3 + p_1 \rho^2 + \lambda p_3 = 0. \tag{12}$$

e il suo discriminante $D(\lambda)$ ha l'espressione

$$D(\lambda) = -27 p_3^2 \lambda^2 - 4 p_1^3 p_3 \lambda$$

e siccome $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} D(\lambda) = -\infty$, ne viene che per λ sufficientemente grande in valore assoluto la (12) ha tre radici della forma

$$\gamma_1(\lambda) + i\gamma_2(\lambda), \quad \gamma_1(\lambda) - i\gamma_2(\lambda), \quad \gamma_3(\lambda) \quad [\gamma_2(\lambda) > 0]$$

con $\gamma_1(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda)$, $\gamma_3(\lambda)$ funzioni continue del parametro λ, e poichè queste tre radici tendono all'infinito per $\lambda \to \pm\infty$, si trova in particolare

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \gamma_2(\lambda) = +\infty.$$

Se teniamo poi conto che tra $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ hanno luogo le relazioni

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\gamma_3 = -\lambda p_3, \quad 2\gamma_1 = -p_1 - \gamma_3$$

abbiamo

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \gamma_3 = +\infty, \quad \lim_{\lambda \to -\infty} \gamma_1 = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to -\infty} \gamma_2 = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \gamma_3 = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \gamma_1 = +\infty, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \gamma_2 = +\infty$$

quindi

(13) $$\lim_{\lambda \to -\infty} (\gamma_1 - \gamma_3) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} (\gamma_1 - \gamma_3) = +\infty.$$

Possiamo subito provare che gli autovalori della (11) hanno per punti limiti $+\infty$ e $-\infty$.

Si prescriva infatti che un integrale $y(x, \lambda)$ della (11) oltre che annullarsi nei punti 0, 1 si annulli nel punto a, $0 < a < 1$; occorre per la (9) che λ soddisfi l'equazione

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \gamma_2(\lambda) - e^{\gamma_3(\lambda) - \gamma_1(\lambda)} & \operatorname{sen} \gamma_2(\lambda) \\ \cos \gamma_2(\lambda)a - e^{[\gamma_3(\lambda) - \gamma_1(\lambda)]a} & \operatorname{sen} \gamma_2(\lambda)a \end{vmatrix} = 0;$$

ora per ogni l intero positivo maggiore di un conveniente numero l_0 esiste almeno un valore positivo [negativo] di λ, che indicheremo con λ_l, tale che

$$\gamma_2(\lambda_l)a = (2l+1)\pi \quad [\gamma_2(\lambda_l)a = -(2l+1)\pi]$$

e si ha

$$\Delta(\lambda_l) = [e^{(\gamma_3 - \gamma_1)a} + 1] \operatorname{sen} \frac{(2l+1)\pi}{a} \quad \left[\Delta(\lambda_l) = -[e^{(\gamma_3 - \gamma_1)a} + 1] \operatorname{sen} \frac{(2l+1)\pi}{a}\right]$$

$$l = l_0 + 1, \quad l_0 + 2, \ldots .$$

Se osserviamo che il fattore $\operatorname{sen} \frac{(2l+1)\pi}{a}$ muta infinite volte di segno quando l diverge a $+\infty$ per valori interi [8], concludiamo l'equazione $\Delta(\lambda) = 0$ ha infinite radici positive e infinite radici negative.

Tenuto poi conto delle (13) e ripetendo i ragionamenti del n° 2, abbiamo che, fissato comunque un intervallo (ξ_1, ξ_2) in $(0, 1)$, si può trovare un numero positivo λ_0 tale che per $|\lambda| > \lambda_0$ qualsiasi integrale $y(x, \lambda)$ della (11) che si annulla in *0* e in *1* ha almeno uno zero in (ξ_1, ξ_2).

[8] Cfr. G. Sansone, loc. cit. [2], p. 688.