Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Vitali

Sulle relazioni lineari fra gli elementi di un ricciano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 265–269.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_265_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sulle relazioni lineari fra gli elementi di un ricciano.

Nota di GIUSEPPE VITALI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. dimostra una proposizione generale atta a mettere in evidenza il carattere proiettivo di certe forme.*

In questa nota io dimostro ([2]) il

TEOR. — Se V_n è una varietà ad n dimensione ed $f(t; u)$ è una sua determinante, se S è una proiettività nello spazio H che trasforma V_n in V_n' ed $f(t; u)$ in $F(t; u)$ [per cui F è certamente

([2]) Per la nomenclatura e le notazioni vedere: G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano*. (N. Zanichelli, Bologna, 1929).

una determinante di V_n'], se infine $f_{r,s}$ ed $F_{r,s}$ indicano i secondi ricciani di f ed F rispetto a sè stesse, supposto che sussista la relazione

$$\Sigma_{rs} d^{rs} f_{r,s} = 0, \tag{1}$$

dove le d sono funzioni delle sole u, sussiste anche la relazione

$$\Sigma_{rs} d^{rs} F_{r,s} = 0. \tag{2}$$

Questo teorema è utile nel riconoscimento del carattere proiettivo di alcune forme associate a certe varietà (§ 4).

Il teorema precedente si può generalizzare in uno relativo a ricciani di ordine qualunque.

***

1. È di facile dimostrazione la

PROP. — Condizione necessaria e sufficiente perchè sussista la (1) è che il parametro

$$\Sigma_{rs} d^{rs} f_{rs} \quad \left(f_{rs} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_r \partial u_s}\right) \tag{3}$$

o appartenga al σ_1 di V_n o sia nullo.

In seguito a questa proposizione la dimostrazione del teorema si riduce a provare che se (3) è un parametro del σ_1 di V_n o è nullo, il parametro

$$\Sigma_{rs} d^{rs} F_{rs} \quad \left(F_{rs} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_r \partial u_s}\right) \tag{4}$$

appartiene al σ_1 di V_n' o è nullo.

2. Noi sappiamo [1] che ogni proiettività di H si può spezzare in un prodotto di non più di tre fattori appartenenti ai tre tipi seguenti:

1°) *Traslazioni.* Una tale proiettività è data dall'equazione

$$F = f + h, \tag{5}$$

dove h è un punto fisso.

2°) *Trasformazioni lineari omogenee.* Per ognuna di queste

[1] G. VITALI, *Un trentennio di pensiero matematico*, (« Atti del XIX Congresso della S. I. P. S. », settembre 1930, pp. 315-327, v. pp. 324-325), e per maggiori dettagli v. *Proiettività nello spazio Hilbertiano*, conferenze di G. VITALI raccolte dalla sig.na E. SENIGAGLIA, che uscirà fra breve negli « Annali di Matematica ».

proiettività si può trovare un doppio sistema di *cartesiani quasi ortogonali*

$$(6) \qquad \varphi_n \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$(7) \qquad \psi_n \qquad (n = 1, 2, ...)$$ (1).

per cui se

$$(8) \qquad f \backsim \Sigma_n c_n \varphi_n,$$

si ha

$$(9) \qquad F \backsim \Sigma_n c_n \psi_n$$ (2).

3°) Le proiettività definite da una equazione del tipo

$$(10) \qquad F = \frac{a \cdot f}{b - \int_g f \psi dt}$$

dove ψ è un parametro normale fisso ed a e b sono delle costanti finite e diverse da zero.

3. Evidentemente basterà dimostrare il teorema nei soli casi in cui S è una proiettività di questi tre tipi.

1°) Se S è del primo tipo, dalla (5) risulta

$$F_{r,s} = f_{r,s}$$

ed il teorema è evidente.

2°) Se S è del secondo tipo dalle (8), (9) risulta

$$(11) \qquad \begin{cases} f_k = \Sigma_n (c_n)_k \varphi_n, & (c_n)_k = \dfrac{\partial c_n}{\partial u_k} \\ f_{rs} = \Sigma_n (c_n)_{rs} \varphi_n, & (c_n)_{rs} = \dfrac{\partial^2 c_n}{\partial u_r \partial u_s} \end{cases}$$

$$(12) \qquad \begin{cases} F_k = \Sigma_n (c_n)_k \psi_n \\ F_{rs} = \Sigma_n (c_n)_{rs} \psi_n. \end{cases}$$

(1) Se si dice che la successione (6) soddisfa alla *condizione* 0 se « Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie $\Sigma_n c_n \varphi_n$ converga in media è che la $\Sigma_n c^2_n$ sia convergente, e se essendo f è una qualunque funzione a quadrato sommabile esiste una serie $\Sigma_n c_n \varphi_n$ che converga in media verso f », si dice che il doppio sistema (6) e (7) è di cartesiani quasi ortogonali, se (6) e (7) sono fra loro biortogonali e soddisfano entrambi alla condizione 0.

(2) Il segno $\backsim$ che figura nelle (8) e (9) significa che la serie del secondo membro converge in media verso la funzione che si trova nel primo membro.

Ora, se il parametro (3) appartiene al σ_1 di V_n o è nullo, si avranno per le (11) le relazioni

$$\Sigma_{rs} d^{rs}(c_n)_{rs} = \Sigma_k l_k (c_n)_k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dove le l_k sono delle funzioni finite delle sole u, e quindi per le (12) si avrà

$$\Sigma_{rs} d^{rs} F_{rs} = \Sigma_k l_k F_k,$$

il che prova che il parametro (4) o appartiene al σ_1 di V_n' o è nullo.

3°) Se S è del terzo tipo vale la (10), che si può scrivere

$$m \cdot F = a \cdot f, \tag{10'}$$

dove

$$m = b - \int_g f \psi dt. \tag{13}$$

Dalla (10') si ricava subito

$$m_k \cdot F + m \cdot F_k = a \cdot f_k \quad \left(m_k = \frac{\partial m}{\partial u_k}\right), \tag{14}$$

$$m_{rs} \cdot F + m_r \cdot F_s + m_s \cdot F_r + m \cdot F_{rs} = a \cdot f_{rs} \quad \left(m_{rs} = \frac{\partial^2 m}{\partial u_r \partial u_s}\right),$$

da cui, indicando con X il parametro (3) e con Y il parametro (4) si ricava

$$F \cdot \Sigma_{rs} d^{rs} m_{rs} + mY + U = a \cdot X \tag{15}$$

dove U indica un conveniente parametro del σ_1 di V_n' o eventualmente nullo.

Ora se X appartiene al σ_1 di V_n o è nullo, si ha

$$X = \Sigma_k l_z f_k, \tag{16}$$

dove le l_k sono funzioni finite delle sole u.

Inoltre dalla (13) risulta

$$\Sigma_{rs} d^{rs} m_{rs} = -\int_g X \psi dt = -\Sigma_k l_k \int_g f_k \psi dt = \Sigma_k l_k m_k$$

e quindi per (14) la (15) diventa

$$a \Sigma_k l_k f_k - m \, \Sigma l_k F_k + mY + U = a \cdot X.$$

Da questa e dalla (16) risulta che Y è o un parametro del σ_2 di V_n' o è nullo, ed è dimostrato il teorema.

4. Ecco una semplice applicazione del nostro teorema. Se fra le $f_{r,s}$ passa una sola relazione lineare come la (1), se la caratteristica della matrice che ha per elementi d^{rs} è almeno $n - 1$, se

con d_{rs} indichiamo il complemento algebrico di d^{rs} in detta matrice (quadrata), nel σ_1 di V_n la quadrica di equazione

$$\Sigma_{rs} d_{rs} du_r du_s = 0 \tag{17}$$

ha carattere proiettivo, ossia per una proiettività si trasforma nell'analoga per la varietà trasformata.

La quadrica (17) che è un'estensione di una nota quadrica delle V_2 in una S_4 considerata dal FUBINI, si presenta in un mio lavoro (¹) nel quale fu segnalato il suo carattere proiettivo con considerazioni intuitive che qui trovano la loro completa giustificazione (²).

In una breve nota di prossima pubblicazione (³) la dott.ª M. BORTOLOZZI colle stesse considerazioni intuitive (⁴) dà ragione del legame che il carattere proiettivo delle asintotiche di una superficie col σ_2 ad una dimensione ha con questo spazio, il quale risponde ad una definizione essenzialmente metrica, e del resto non invariante per proiettività.

(¹) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie.* (« Annales de la Soc. Polonaise de Math. », t. VII, 1928, pp. 43-67, v. p. 53).

(²) La dott.ª R. LICENI dette poi poco appresso una dimostrazione geometrica del carattere proiettivo di (17), v. R. LICENI. *Sulla forma* F_2 *di Fubini e Vitali.* (« Atti del R. Ist. Veneto », t. LXXXVIII, 1928-29).

(³) M. PREVIATTI BORTOLOZZI, *Sulla equazione delle asintotiche di una* V_2 *col* σ_2 *a tre dimensioni.* (« Rend. della R. Acc. dei Lincei »).

(⁴) Le quali mi hanno indotto alla presente pubblicazione.