BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

MARIO CRENNA

Deduzione elementare del principio di Huygens, sul moto dei baricentro di un pendolo composto, dal teorema delle aree

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 257–259.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_257_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

PICCOLE NOTE

Deduzione elementare del principio di Huygens, sul moto del baricentro di un pendolo composto, dal teorema delle aree.

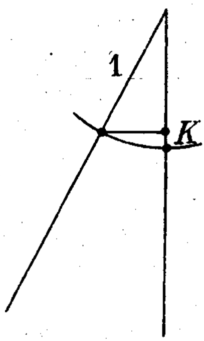
Nota di MARIO CRENNA (a Fiorenzuola).

Sunto. - *Il principio di* HUYGENS, *sul moto del baricentro di un pendolo composto, si può dedurre* elementarmente *dal teorema delle aree, anzichè ricondurre il principio al teorema di conservazione dell'energia, come si è fatto finorá. La nuova deduzione, col suo processo completamente elementare, si presta anche a lumeggiare meglio l'essenza del principio considerato.*

È noto che HUYGENS ha dato, per primo, la soluzione generale per la determinazione del *centro di oscillazione* di un pendolo composto, trovandone la chiave « nell'idea *nuova* seguente che — al dire del MACH — è assai più importante del problema stesso. In tutti i casi, qualunque siano le modificazioni che le reciproche reazioni delle molecole del pendolo apportino al moto di ciascuna di esse, le velocità acquistate nel moto di discesa del pendolo debbono essere tali, che il centro delle masse possa risalire esattamente all'altezza donde è caduto, tanto se le masse conservino i loro legami, quanto se questi legami siano distrutti. Davanti ai dubbi dei suoi contemporanei, rispetto all'esattezza di questo principio, HUYGENS fu costretto di far osservare che esso contiene solo l'affermazione del fatto che i corpi pesanti non si muovono da sè stessi verso l'alto » (1). La derivazione di questo principio dal teorema di conservazione dell'energia è nota da antica data; in questo scritto mi propongo di dimostrarne la deduzione diretta.

(1) Cfr. ERNESTO MACH, *Die Mechanick in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt.* Nella versione italiana di DIONISIO GAMBIOLI, *I principî della meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo da Ernesto Mach.* Con prefazione di GIOVANNI VAILATI. Roma, Albrighi e Segati; il passo citato si trova a pag. 168.

elementare, dal teorema delle aree: possiamo infatti considerare i legami fra le masse dei varî pendoli semplici, costituenti il pendolo composto, come forze *interne* che compiono lo stesso ufficio dei legami, ai quali possiamo perciò sostituirle; d'altra parte è noto che nel teorema delle aree le forze *interne* non producono effetto alcuno e che da esse, perciò, si prescinde nella traduzione analitica del teorema. Sia dato allora un pendolo lineare e si consideri un segmento unitario a partire dall'asse, e sia K l'altezza di caduta verticale dell'estremità del segmento considerato, quando il pendolo passa dalla sua posizione di ampiezza massima alla posizione di equilibrio. Le altezze di caduta delle masse m, m', m'',... poste alle distanze r, r', r'',... dall'asse saranno rK, $r'K$, $r''K$,... rispettivamente.



Il primo membro dell'uguaglianza che deve tradurre analiticamente il teorema delle aree è manifestamente:

$$\frac{1}{2}\Sigma mr^2 \arccos \frac{r-K}{r}.$$

Quando il pendolo composto passa per la posizione di equilibrio, il punto, la cui distanza dall'asse è l'unità di lunghezza, è animato da una velocità tangenziale v incognita. L'altezza di ascensione di questo punto, sopprimendo i legami, sarà $\frac{v^2}{2g}$ e le altezze corrispondenti per le altre masse saranno

$$\frac{(rv)^2}{2g},\quad \frac{(r'v)^2}{2g},\quad \frac{(r''v)^2}{2g},\ldots.$$

Il secondo membro dell'uguaglianza anzidetta verrà espresso, in modo analogo, da

$$\frac{1}{2}\Sigma mr^2 \arccos \frac{r-\dfrac{r^2v^2}{2g}}{r}.$$

Avremo dunque:

$$\Sigma mr^2 \text{ arc cos} \left(1 - \frac{K}{r}\right) = \Sigma mr^2 \text{ arc cos} \left(1 - \frac{rv^2}{2g}\right).$$

Il teorema delle aree sussiste ancora se queste vengono proiettate su di un piano o su di un asse comune [1]; proiettandole sull'asse verticale che passa per il punto di sospensione del pendolo composto si ricava subito:

$$\Sigma m(r - rK) = \Sigma m \left(r - \frac{r^2v^2}{2g}\right)$$

da cui

$$K\Sigma mr = \frac{v^2}{2g} \Sigma mr^2$$

che è l'espressione del principio di HUYGENS [2].

[1] Volendo usare questa dimostrazione per un'esposizione elementarissima (escludendo la funzione arc cos) si può evitare di esprimere analiticamente il teorema delle aree, esprimendone senz'altro la proiezione sull'asse verticale passante per il punto di sospensione, dalla considerazione della figura.

[2] Cfr. per es. MACH, op. cit., pag. 170.