Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

RECENSIONI

N. KRYLOFF: *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique.* Paris, Gauthier-Villars, 1931, fr. 15 (Fascicolo XLIX della collezione « Mémorial des sciences mathématiques », diretta da H. VILLAT).

La fondamentale importanza e vastità dell'argomento indicato nel titolo non ne possono evidentemente consentire una trattazione esauriente (anche solo con speciale riguardo ai contributi personali dell'Autore) in un opuscolo di una sessantina di pagine, quante ne hanno in media i fascicoli del « Mémorial ». Ben a ragione perciò vi si contemplano prevalentemente, se non esclusivamente, problemi che si collegano all'integrazione della equazione autoaggiunta del secondo ordine

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+\lambda qy=f, \tag{1}$$

dove $y(x)$ è l'incognita, p, q, f sono funzioni assegnate di x nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$, e λ è un parametro (indipendente da x). Si espone in un primo luogo (per $\lambda=1$, $p>0$, $q<0$) il metodo di approssimazione del RITZ, nell'ipotesi che $y(x)$ debba annullarsi agli estremi dell'intervallo. Notoriamente, lo spirito del procedimento, applicabile a tutti i problemi che equivalgono a rendere minima una qualche espressione $I(y)$ (e tale è in particolare il caso semplice testè riferito), consiste nel ricercare y fra le combinazioni lineari di funzioni prefissate

$$\psi_1,\ \psi_2,\dots,\ \psi_m,\ \psi_{m+1},\dots;$$

più precisamente, nel determinare, per i successivi valori di m, quella fra le espressioni ridotte

$$y_m=\sum_1^m{}_i\,\alpha_i\psi_i(x),$$

per cui i coefficienti costanti α_i rendono $I(y_m)$ il più piccolo possibile. Se le ψ costituiscono un sistema chiuso, sotto condizioni addizionali che l'A. esplicita nella forma considerata originariamente dal RITZ (rilevando che sono stati proposti, segnatamente dal COURANT e dal PICONE, notevoli varianti ed utili perfezionamenti), si può affermare che esiste

$$\lim_{m \to \infty} y_m = y,$$

e che tale funzione y risolve il problema proposto.

Il KRYLOFF dà la dimostrazione di esistenza in modo elementare diretto, accennando poi a vari criteri che permetterebbero di conseguirla per subordinazione a principi più generali: teorema di ARZELÀ, metodi diretti del calcolo delle variazioni (TONELLI), ricerche di FUBINI. Passa quindi a discutere un lato essenziale della questione, del quale egli fu pionere e promotore indefesso, avendo in lunga serie di Memorie, colla collaborazione dei suoi scolari (fra cui principalmente N. BOGOLIOUBOFF) raggiunto numerosi, importanti risultati. Ecco come lo stesso Autore ne presenta le finalità:

« Nella elaborazione dei metodi di integrazione approssimata, ha fondamentale importanza il possedere metodi di dimostrazione i quali permettano non soltanto di stabilire la convergenza dell'algoritmo, ma anche di assegnare, in forma esplicita e quanto più possibile precisa, un limite superiore dell'errore che si commette arrestandosi alla m^{esima} approssimazione.... Quello che importa sopratutto dal punto di vista delle applicazioni, è di raggiungere un'approssimazione sufficiente con piccoli valori di m e calcoli comodamente effettuabili; sicchè non si esagera affermando che, se pur restano preziosi i criteri direttivi di carattere generale, bisogna poi, questione per questione, escogitare particolari accorgimenti per ricavarne un metodo di integrazione approssimata, che veramente risponda allo scopo ».

Occupandosi (sempre con riferimento alla (1)) del caso generale, il KRYLOFF dà varie formule di maggiorazione dell'errore da cui può essere affetto I_m, mostrando in primo luogo che l'ordine di grandezza è comparabile a $|y - Y_m|$, in cui Y_m designa la somma dei primi m termini dello sviluppo di FOURIER della funzione incognita y. Altre valutazioni, derivanti sempre da successioni minimizzanti (relative però ad espressioni anche molto discoste dalla forma tipica adottata dal RITZ) furono assegnate dal PICONE in una Memoria del 1928 (« Rend. del Circolo Mat. di Palermo », T. II). L'A. cita, ma non può soffermarsi, dovendo, anche dei risultati propri, limitarsi spesso alla semplice notizia.

Ciò si accentua quanto più si procede nel volumetto. Gli argomenti trattati con concisione voluta e, data la ristrettezza di spazio, inevitabile, ma (almeno per mia esperienza) non di rado faticosa, sono: approssimazione degli autovalori ed autofunzioni della (1): integrazione di certe equazioni differenziali non lineari; metodi di approssimazione forniti dalle differenze finite, nonchè della divisione dell'intervallo di integrazione in tratti entro ognuno dei quali i coefficienti si riguardino costanti (SIGNORINI).

L'A. si scusa di non aver potuto nemmeno riassumere le ricerche più recenti, sue e di altri, relative specificamente ai soggetti prescelti. Ciò rende anche più desiderabile che egli stesso faccia presto seguire al fascicolo un'opera ben altrimenti voluminosa, in cui l'importante materia e le più cospicue applicazioni possano essere lumeggiate sotto vari aspetti, in modo sistematico, e con tutte le semplificazioni che vi apporteranno nel frattempo la geniale abilità di lui e la collaborazione internazionale.

T. LEVI-CIVITA

T. Y. THOMAS: *The elementary Theorie of Tensors, with Applications to Geometry and Mechanics.* (Mc Graw-Hill Publishing C°, London, Aldwych House, London, W. C. 2, 1931). Pag. IX-122.

Questo volume, pubblicato in elegante veste tipografica, contiene, con aggiunte, gli argomenti svolti dall'A. nell'Università di Princeton durante gli anni 1927-28 e 1928-29. Esso si propone di dare, in forma elementare, le idee fondamentali della teoria dei tensori, insieme alle applicazioni più ovvie alla Geometria, alla Cinematica euclidea e alla Dinamica newtoniana. Un primo Capitolo è dedicato a considerazioni preliminari, richiamando, in forma forse anche troppo succinta, i concetti fondamentali di variabile, di funzione, di continuità, di derivabilità, di integrazione semplice e multipla e si chiude con un riepilogo della teoria dei determinanti e delle equazioni lineari. Si entra in argomento nel Capitolo secondo: esso si inizia colla nozione di spazio; si definiscono i sistemi di coordinate, le trasformazioni invertibili; si danno poi le notazioni moderne, in particolare quelle di sommazione compatta (omissione del segno Σ). Segue la definizione di invariante o « scalare », quella di vettore controvariante o covariante, e come generalizzazione di questi, vengono definiti i Tensori e sono date le regole del loro calcolo: somma, moltiplicazione e contrazione. Il terzo Capitolo è intitolato « Geometria Euclidea ». Esso comincia con una distinzione fra Geometria logica e Geometria fisica: in questa, la validità delle proposizioni deve essere soggetta ad una riprova sperimentale; definisce poi il corpo rigido in Geometria Euclidea come quello in cui, essendo p_i, q_i, ($i = 1, 2, 3$) le coordinate di due punti del corpo, la $\sum_{i=1}^{3}(p_i - q_i)^2$ rimane invariata per tutti gli spostamenti, convenientemente definiti, del corpo; ne deduce che gli spostamenti sono rappresentati da trasformazioni lineari. Viene poi indicato, anche con riferimenti di carattere pratico, come debba intendersi la misurazione di distanza, di angolo, di area, e stabilisce un principio che l'A. dice di relatività euclidea, consistente nella arbitrarietà di scelta del sistema cartesiano ortogonale di riferimento. Il Capitolo quinto introduce, accanto alle coordinate, una quarta variabile, il tempo, il cui concetto viene brevemente illustrato (v. la nota a piè della pag. 53); il Capitolo stesso è poi interamente dedicato a stabilire, sempre coll'uso delle notazioni introdotte nel Capitolo secondo, numerosi teoremi cinematici relativi al moto sia di un punto, sia di un corpo rigido; sono esaminati vari tipi di moti curvilinei, ed un gran numero di esercizi proposti valgono a completare i casi esaminati nel testo. Infine il quinto Capitolo, intitolato « Dinamica newtoniana » si fonda su un principio che l'A. chiama « principio dinamico di relatività », secondo il quale: « un sistema cartesiano ortogonale di assi può, nella trattazione analitica delle questioni di dinamica, essere sostituito da un altro i cui assi, rispetto ai primi, siano in moto con velocità costante ». Vengono definita la massa, seguendo il MACH; la forza, il peso; è data la legge di Gravitazione secondo NEWTON; sono stabilite le equazioni di LAGRANGE e posto in relazione con queste il potenziale cinetico. Seguono numerosi esempi rivolti ad illustrare l'uso delle equazioni di LAGRANGE nella trattazione dei problemi dinamici, e anche qui, questi esempi vengono completati da un rilevante numero di appropriati esercizi proposti. In complesso, l'A. ha inteso di presentare un testo di carattere essenzialmente didattico, che tratti sotto forma relativamente elementare questioni geometriche e meccaniche sotto al punto di vista invariantivo. Questo intento ci sembra efficacemente raggiunto, e si può consigliare allo studente la lettura del libriccino del THOMAS, come utile preparazione allo studio delle opere maggiori scritte in quel indirizzo, ma di carattere più elevato. (*u*)

K. KNOPP: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlino, Springer, 1931, pag. XII + 582.

Questo libro, uscito nel 1922 come secondo volume della collezione « Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen » giunge ora alla sua terza edizione (oltre ad una traduzione inglese). La fortuna di esso è veramente meritata per la chiarezza e la organicità della esposizione, nella quale trovano posto anche i lavori più recenti.

Questa edizione differisce dalle precedenti tedesche sopra a tutto per l'aggiunta di un capitolo relativo alle formule sommatorie di EULERO e agli sviluppi asintotici; vi sono però anche nella rimanente parte dell'opera modificazioni di dettaglio suggerite da recenti ricerche; tra queste si devono segnalare specialmente alcune dimostrazioni sulle serie divergenti ispirate a lavori di SCHUR, ANDERSEN e KARAMATA comparsi in questi ultimi tre anni e relativi i primi all'equivalenza di due processi di sommazione, l'ultimo alla dimostrazione di una importante proposizione di LITTLEWOOD.

La diffusione del libro, nelle sue precedenti edizioni, mi dispensa da un'analisi approfondita di esso. Riporterò soltanto l'indice dei capitoli:

Prima parte: Numeri reali (cap. I) e successioni di numeri reali (II).

Seconda parte: Serie a termini positivi (III) e qualunque (IV). Serie di potenze (V) e sviluppi delle funzioni elementari (VI). Prodotti infiniti (VII). Calcolo della somma di una serie (VIII).

Queste due parti si riferiscono ai fondamenti della teoria delle serie. La terza parte si propone invece di sviluppare e completare quanto è stato finora esposto con riguardo alle diverse applicazioni.

Si hanno così i capitoli seguenti:

Serie a termini positivi (IX) e qualunque (X). Serie di funzioni (XI). Serie a termini complessi (XII). Serie divergenti (XIII). Le formule sommatorie di EULERO e gli sviluppi asintotici (XIV).

L'Indice conferma quanto ho già detto circa la completezza e la organicità del trattato. *g. s.*

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Walter de Gruyter, Berlin, 1931.

Di questa importante pubblicazione già si è detto al n.° 2, pag. 102, del presente « Bollettino »; ora possiamo aggiungere che sono recentemente usciti ben sette nuovi fascicoli, cosicchè la serie sarà ben presto completata ed aggiornata.

I fascicoli ora usciti sono i seguenti:

Vol. 51, annata 1925, fascicolo I: Storia, Filosofia, Pedagogia, Teoria degli insiemi; fascicolo II: Aritmetica ed Algebra; fascicolo III: Analisi.

Vol. 54, annata 1928, fascicolo I: Storia, Filosofia, Pedagogia, Teoria degli insiemi; fascicolo II: Aritmetica ed Algebra.

Vol. 55_1: Storia, Filosofia, Pedagogia, Teoria degli insiemi; fascicolo II: Aritmetica ed Algebra.

Un cartellino unito a quest'ultimo fascicolo avverte che a partire dal volume 55 (annata 1929), ciascun volume sarà diviso in due parti, distinte con la apposizione dei segni 1, 2, accanto alla numerazione dei volumi, al modo seguente: Bd. 55_1, Bd. 55_2. Le due parti di ciascun volume saranno press'a poco della stessa mole. Ciò sarà fatto per ottenere maggior speditezza nella composizione dei volumi, e maggior compattezza nella distribuzione della materia.

È desiderabile che alla fine di ciascuna parte (e non solo alla fine di ciascun volume) sia posto l'indice alfabetico degli Autori considerati.

ETTORE BORTOLOTTI

VITO VOLTERRA: *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Rédigées par M. BRELOT. (« Cahiers Scientifiques », Fasc. VII). Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 214 (fr. 60).

Affinchè di un gruppo di fatti sia possibile una teoria matematica, è necessario che riesca di porne in evidenza un qualche elemento caratteristico capace di misura e che una qualche geniale astrazione permetta di vincolare la variabilità di tali elementi mediante relazioni analitiche precise. È forse per questa ragione che, nonostante il suono delle parole, ben poco cammino si è fatto finora nell'indirizzo di una teoria matematica dei fenomeni economici, biologici, sociali: chè alla effettiva costituzione di una tale teoria non basta l'indeterminata convinzione di dipendenze logiche e funzionali.

Una domanda precisa e pratica relativa a risultati statistici sopra le variazioni della fauna marina ha spinto negli anni 1925-26 il VOLTERRA ad interessarsi di proposito della traduzione analitica delle condizioni di esistenza di associazioni biologiche; e a darci uno dei più completi ed espressivi saggi di quanto possa, anche in questo campo, l'analisi matematica acutamente condotta; le stesse ricerche hanno formato argomento di un Corso di Conferenze tenuto dal VOLTERRA a Parigi all'Istituto Poincaré nell'inverno 1928-29, del quale il presente volume è la riproduzione.

Il fatto assoggettabile a misura nel fenomeno della « lotta per l'esistenza », intesa nel senso darwiniano, è il numero degli individui di ciascuna specie biologica presenti in un dato istante in un determinato ambiente: più precisamente dunque la densità istantanea di ciascuna specie: l'astrazione che permette al VOLTERRA di porre l'argomento in equazione è — per lo meno in un primo tempo — che la « lotta » si riduca esclusivamente alla ricerca di alimento: in un secondo tempo l'ipotesi si allarga alquanto, come diremo.

Segue da questa ipotesi che la « lotta » consisterà o nel contendersi più specie lo stesso alimento ovvero nel loro vicendevole divorarsi: e il risultato della lotta è in ogni caso l'accrescimento (positivo o negativo) — derivata della densità rispetto al tempo — delle singole specie.

La prima ipotesi, quella cioè della contesa d'uno stesso alimento, è matematicamente di minor interesse perchè porta rapidamente alla semplice conclusione dell'estinzione di tutte le specie meno una, quella il cui accrescimento è meno influito dalla diminuzione di nutrimento. Anche biologicamente si potrebbe pensare di interesse più limitato perchè, estendendo sufficientemente il gruppo delle specie considerate, si giungerà sempre alle condizioni della seconda ipotesi.

Comunque a questa seconda ipotesi è rivolta la massima parte del libro: occorrendo fissare una legge sul modo di influire della lotta sull'accrescimento positivo o negativo, è naturale supporre che, per ciascuna specie, questo accrescimento sia proporzionale al numero degli individui (densità istantanea) della specie medesima: e che il coefficiente di proporzionalità risulti uguale alla somma di due termini: l'uno determinante l'accrescimento naturale della detta specie, l'altro dipendente dalle distruzioni e dagli apporti di nutrimento che, per rapporto alla specie considerata, sono dovuti alla presenza delle altre specie. Il supporre per questo termine una legge di proporzionalità alla densità rispettivamente delle specie distruggitrici o divorate, e quindi supporre che esso sia una combinazione lineare a coefficienti costanti delle densità delle singole specie, è ben naturale. Ma il VOLTERRA dà di queste ipotesi una ulteriore giustificazione mediante una *teoria degli incontri* e una *ipotesi degli equivalenti* le quali permettono anche di limitare la generalità dei coefficienti delle suddette combinazioni lineari. Risulta allora che la matrice di essi coefficienti sarà il prodotto di una emisimmetrica e di una matrice diagonale nell'ipotesi che sul valore del detto coefficiente non influisca la densità della specie medesima: sostituirà invece gli elementi nulli della diagonale principale mediante elementi $\neq 0$ nell'ipotesi più verosimile che l'aumento della densità di ciascuna specie tenda a far decrescere il coefficiente di accrescimento della specie medesima e che questa influenza abbia, almeno in prima approssimazione, forma lineare (del che non si può più dare giustificazione teorica). Ma notevoli conclusioni si ottengono pure supponendo per i detti coefficienti limitazioni assai meno restrittive.

Fra le limitazioni che il VOLTERRA aggiunge per comodità analitica è costante (salvo che nel caso di un numero dispari di specie con coefficiente di accrescimento naturale indipendente dalla loro densità) quella che il determinante della suddetta matrice non sia nullo: ipotesi che non ci pare troppo giustificata *a priori* dal problema biologico reale perchè cade facilmente in difetto se, per es., parecchie specie fra loro indifferenti, si nutrissero tutte delle restanti; ed è d'altronde meno essenziale di quanto possa apparire da qualche punto del testo [1].

Ancora una distinzione essenziale si deve fare fra i termini positivi delle dette combinazioni lineari (accrescimento proprio per apporto di alimento) ed i termini negativi (distruzioni); in quanto le distruzioni si riflettono indubbiamente in diminuzione istantanea della densità della specie, mentre è ben chiaro che l'aumento della specie per apporto di alimento non può essere che differito. Quando questo diverso comportamento si trascura (o per lo meno si ammette di poterne tenere conto con sufficiente approssimazione mediante la scelta appropriata dei coefficienti delle combinazioni lineari) il problema si traduce in un sistema di equazioni differenziali ordinarie: quando invece di esso voglia tenersi conto esplicito, si è condotti a un sistema di equazioni integro–differenziali che il VOLTERRA avvicina opportunamente a quelle che già gli si erano presentate nelle sue ricerche di meccanica ereditaria.

Senza che delle funzioni incognite sia necessario e praticamente possibile calcolare espressioni esplicite, l'A. ne esamina a fondo l'andamento con la ricchezza di mezzi analitici e geometrici che gli è propria, studiando nei primi tre capitoli il caso del sistema differenziale ordinario, nel 4° quello del sistema integro–differenziale: esistenza e non esistenza di stati conservativi, fluttuazioni ammortizzate e non, legge di conservazione delle medie e legge delle perturbazioni.

Il volume termina con un capitolo riassuntivo ove si accenna, con ricca bibliografia, alle verifiche sperimentali finora tentate dai cultori di statistica biologica.

Noi vogliamo rilevare, ricollegandoci a quanto dicevamo in principio, che l'importanza del volume trascende il particolare argomento biologico. La « lotta per la vita » è l'immagine generale di

[1] Si confronti in proposito la Piccola Nota: *Stabilità e instabilità delle associazioni biologiche,* in questo medesimo fascicolo del « Bollettino ».

avvenimenti reagenti l'uno sopra l'altro, il cui schema, convenientemente variato, si ritrova in altri campi fisici, economici, sociali, in ogni processo di produzione e di trasformazione: lo studio del VOLTERRA ci mostra come, anche soltanto con una ricerca qualitativa, l'applicazione dell'Analisi possa andare ben oltre le grossolane analogie col modello meccanico: ci mostra anzi che quantunque formalmente non sia difficile riassumere nelle stesse equazioni la meccanica e la « lotta per la vita », la diversa scelta che nei due casi si deve fare per le funzioni e le costanti che costituiscono gli elementi assegnati fa divergere le conseguenze.

B. LEVI

B. L. VAN DER WERDEN: *Moderne Algebra*. Berlin, Springer. (« Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen »). Erster Teil (Bd. 33) p. 243 + VIII (RM. 15,60 rileg. RM. 17,20) 1930. Zweiter Teil (Bd. 34) p. 216 + VII (RM. 15 rileg. RM. 16,60) 1931.

ERNST STEINITZ: *Algebraische Theorie der Körper*. Berlin–Leipzig, Walter de Gruyter e C., 1930. p. 150 + 27 (RM. 9).

Nel complesso delle teorie analitiche la parola « algebra » ha avuto, ed ancora ha, significato mutevole: era tutta l'analisi prima dell'invenzione del Calcolo Infinitesimale; e dopo se ne distinse forse soltanto perchè immune dai dubbi inerenti alla « metafisica » della nozione di infinitesimo. Se attualmente essa tende, quasi per comune consenso, a concretarsi e restringersi nello studio delle proprietà formali di un gruppo di elementi *(numeri) con doppia composizione* (STEINITZ), capaci cioè di combinarsi fra loro mediante due operazioni da chiamarsi addizione e moltiplicazione ed i cui risultati sono ancora elementi del gruppo, si può ben dire che, anche dopo eliminati i dubbi metafisici, ciò si accordi bene col suo primitivo carattere di appoggiare e controllare il ragionamento mediante le regole del calcolo: quantunque porti ad escludere dall'« algebra moderna » buona parte della produzione degli algebristi del 700 e del primo 800 e a farne esulare (od almeno a darvi posto vuoi di accessorio, vuoi di definizione) perfino il « teorema fondamentale », il grande scoglio a superare il quale occorse il genio di GAUSS. In compenso di queste rinunce essa si è arricchita nel mirabile campo di ricerche creato dalle successive estensioni della nozione di « numero » in cui si è concretato il pensiero di GALOIS, di KUMMER, di DEDEKIND, di GRASSMANN, di KRONECKER.

In verità, la nozione generica di sistema a doppia composizione è ancora troppo indeterminata: e la suggestione contenuta nei due nomi di « addizione » e di « moltiplicazione » non basta a definire il dominio dell'algebra, perchè il giorno stesso che, nella più elementare algebra, si è passati dal campo dei numeri interi a quello dei razionali, da questo a quello dei numeri reali, ecc., *conservando le proprietà formali delle operazioni aritmetiche*, a qualcuna di queste proprietà si è pur dovuto tacitamente rinunciare, senza di che nessuna estensione del campo dei numeri sarebbe stata possibile: occorre dunque scegliere fra le proprietà che veramente si conservano e quelle cui si vuole rinunciare, ed ogni nuova estensione è una diminuzione del gruppo delle prime ed un ampliamento di quello delle seconde. Si conserva un po' più delle proprietà dell'addizione (associatività, commutatività, invertibilità); si abbandonano un po' più quelle della moltiplicazione, conservando soltanto come caratteristiche la proprietà associativa e la distributiva rispetto all'addizione; ma già nello studio dell'addizione, applicata ai numeri dell'algebra elementare, hanno importanza fondamentale ipotesi meno palesi, quali l'ordinabilità, la distinguibilità dei numeri in positivi e negativi, ecc., le quali nulla dice *a priori* se debbano conservarsi oppur non come essenziali alla nozione di *numero*: basti ricordare che la necessità di far rientrare nell'algebra i cosidetti « numeri complessi ordinari » — che quelle proprietà di ordinamento non verificano — è argomento del tutto elementare, e che d'altra parte lo studio « assiomatico » dell'algebra ha portato recentemente ARTIN e SCHREIER a riconoscere in dette proprietà l'elemento essenziale per definire la posizione del « teorema fondamentale » nel corpo delle dottrine algebriche.

Dalla più o meno ampia conservazione o rinuncia alle proprietà caratteristiche dei comuni « numeri » dell'aritmetica elementare sorgono così le nozioni di *anello (Ring)* (dominio nel quale non si chiede l'invertibilità della moltiplicazione) e di *campo di integrità* (anello con moltiplicazione commutativa), di frazione e di *corpo* (campo nel quale ha pure luogo la divisione per ogni numero $\neq 0$), di *campo di razionalità* o *corpo commutativo* (se la moltiplicazione è inoltre commutativa); di *corpi finiti* (con un numero finito di elementi), di divisori e di radici dello zero, di ampliamenti mediante la formazione di polinomi — ampliamenti trascendenti e ampliamenti algebrici — di ideali, ecc.

Il trattato del VAN DER WERDEN, il quale origina dalla rielaborazione di alcuni corsi di lezioni tenuti ad Amburgo e a Gottinga dall'Autore, da E. ARTIN, W. BLASCHKE, O. SCHREIER, E. NOETHER, conduce il lettore attraverso uno svolgimento organico dell'ordine di vedute sopra accennato, mediante una successione di capitoli sugli aggregati, gruppi, anelli e corpi, sugli ampliamenti di un corpo, sulla Teoria di GALOIS, sull'eliminazione, sulla teoria generale degli ideali e dei numeri algebrici, sulla teoria dei moduli e delle matrici (algebra lineare), sui sistemi di numeri complessi con assegnata tavola di composizione (*algebre* — come da alcuni anni si è detto —: meglio, ci pare, — come dice l'A. — *numeri ipercomplessi*, poichè la tradizione ha attribuito il nome di algebra alla teoria e al simbolismo operatorio, mentre ha chiamato « complessi (ordinari) » il caso più semplice di ipercomplessi). L'ordine degli argomenti non è certamente quello dello svolgimento storico: piuttosto corrisponde ad un organamento critico-logico; nè, anche da questo punto di vista, la via è rettilinea e tracciata in modo obbligatorio; per necessità di cose buona parte dei capitoli tratta di campi numerici assai particolari (e cioè assai più prossimi ai due fondamentati dei numeri interi e dei numeri reali che non sia la nozione generale di numeri e di operazioni su di essi introdotta nei primi capitoli); talune teorie, come l'algebra lineare e l'eliminazione, richiedono certamente una elaborazione dei concetti relativi alla natura dei campi numerici assai più elementare di quella che precede il loro collocamento nell'opera; tutto cio è nell'essenza dell'argomento, e una tabella a guisa di albero genealogico premessa a ciascuno dei volumi cerca di richiamare alla mente del lettore questa parziale indipendenza dei vari capitoli; essa può anche servire allo scopo per cui pare essere stata scritta più precisamente, di orientare il lettore che desiderasse seguire nel libro soltanto un argomento particolare; purchè però questi si adatti — valendosi all'uopo dell'accurato indice per materia — a ricorrere qua e là anche ai capitoli che gli si consiglia di omettere per la completa intelligenza della nomenclatura. D'altra parte il trattato del VAN DER WERDEN non intende chiaramente sostituire gli ampi trattati classici sopra i singoli argomenti che danno titolo a parecchi capitoli, nè vuole — è detto esplicitamente — indirizzarsi a principianti; che anzi maggiormente si sorvola ove più l'argomento si avvicina alle forme classiche: esso ci presenta invece una veduta sintetica dei recentissimi contributi della nuova scuola algebrista tedesca di cui l'A. è uno dei più vivaci rappresentanti [1].

[1] Ci sia permesso di notare di passaggio che un programma avente con quello del VAN DER WERDEN molte affinità, pur con notevolissime differenze e con quelle anzitutto provenienti da una differenza di data di 15 anni, si riscontra già nell'Introduzione alla Analisi Matematica dello scrivente (1916), la quale, insieme d'altronde con altra letteratura italiana, sembra completamente sfuggita all'attenzione dell'A., per lo meno a giu-

Il punto di partenza dell' « algebra moderna » ci pare debba ravvisarsi principalmente nell'opera del KRONECKER: a lui si devono invero le nozioni di campo di razionalità (attualmente « corpo ») e di campo di integrità, quella di estensione del campo mediante l'aggiunzione di variabili libere (ampliamento trascendente) o vincolate da relazioni algebriche (ampliamento algebrico), la riduzione di questi vincoli a congruenze di polinomi. Ma il KRONECKER non aveva rivolto ancora l'attenzione a precisare la varietà delle ipotesi che sono compatibili colle proprietà essenziali delle operazioni aritmetiche e quindi le diverse eventualità che si possono presentare nella teoria algebrica dei corpi. Questo studio fece in modo vasto e penetrante lo STEINITZ nella Memoria *Algebraische Theorie der Körper* pubblicata nel vol. 137 del « Giornale di Crelle » (1910) la quale si può considerare come il fondamento della teoria dei corpi commutativi: opportunamente l'editore De Gruyter la ripubblica quindi in volume, per cura di R. BAER e H. HASSE.

Il merito principale dello STEINITZ è di aver posto in evidenza l'ufficio che compie nella classificazione generale dei corpi algebrici il corpo costituito dai resti dei numeri interi rispetto ad un intero assegnato p: (poichè nella definizione di corpo lo STEINITZ esclude l'esistenza dei divisori dello 0, questo numero p deve — per lo STEINITZ — essere primo). Ogni corpo contiene un corpo parziale minimo (secondo lo STEINITZ, *primo*) il quale può essere costituito dal (o isomorfo al) corpo dei numeri razionali ovvero può essere il (o isomorfo al) corpo dei resti suaccennati rispetto ad un conveniente numero primo p: nel primo caso lo STEINITZ dice che il corpo assegnato ha caratteristica 0, nel secondo dice che esso ha caratteristica p. I corpi di caratteristica $p > 0$ presentano gli esempi di maggiori singolarità, in particolare quella della *incompletezza* (di ammettere cioè equazioni irreduttibili con radici multiple). Lo STEINITZ studia lungamente questi corpi aventi caratteristica. Un altro particolare della teoria dello STEINITZ è che, partendo da una definizione del tutto astratta del « corpo », egli è condotto naturalmente a lasciare indeterminata la potenza (nel senso di CANTOR) dell'aggregato degli elementi di esso. Nella ricerca di svolgere, per un corpo qualunque, una teoria analoga a quella di GALOIS, egli fa quindi uso più di una volta del postulato della scelta e della induzione transfinita, che abitualmente

dicare dal breve elenco di trattati a consultarsi portato nelle prime pagine del libro. (Il lettore italiano potrà ad esempio trovare un notevole aiuto alla lettura dei capitoli alquanto sintetici sui numeri iperalgebrici nel trattato semplice e piano dello SCORZA, *Corpi algebrici e Algebre*).

non interessano le questioni algebriche. BAER e HASSE hanno accompagnata la pubblicazione con una serie di richiami e note bibliografiche — che per comodità del lettore sono stampati in un fascicolo sciolto — fra le quali si trovano diverse semplificazioni alle dimostrazioni dello STEINITZ, alcune delle quali hanno anche il merito di eliminare l'uso del postulato della scelta. In appendice hanno aggiunto un « Saggio sulla teoria di GALOIS » secondo le idee di STEINITZ. Si tratta della dimostrazione di un teorema dovuto in parte allo STEINITZ medesimo, in parte al KRULL, il quale assegna le condizioni necessarie e sufficienti affinchè ciascun sottocorpo intermedio fra un corpo K e un corpo più ampio N, normale rispetto a K (tale cioè che ogni equazione algebrica irreduttibile in K, ma riduttibile in N, abbia tutte le sue radici razionali in N) sia definita dalla condizione che tutti e soli i suoi elementi sono invarianti per un determinato automorfismo di N. Si trova, in completa coincidenza con quanto avviene quando K è il campo dei numeri razionali (ordinaria teoria di GALOIS), per la condizione cercata che: 1°) ogni elemento di N sia radice di una equazione irreduttibile in K, priva di radici multiple; 2°) Esista un n tale che $n+1$ elementi qualunque di N siano sempre fra loro linearmente dipendenti in K. La dimostrazione procede ancora nell'ipotesi della ordinabilità di N (postulato di ZERMELO) e per induzione transfinita.

Il volumetto è arricchito, oltrechè dell'indice per materie ormai di consuetudine, di una tavola di parellelo fra le pagine del libro e quelle della memoria originale e di un ritratto dello STEINITZ.

B. LEVI

A proposito della recensione del volume: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, apparsa nel fascicolo di Aprile del « Bollettino », l'A., prof. G. LORIA, ci ha fatto notare che le ricerche aritmetiche del MONTESANO sui gruppi base delle trasformazioni cremoniane piane di cui là si lamentava la dimenticanza, sono effettivamente ricordate alla pag. 393 del libro. In verità l'affinità di argomento avrebbe dovuto dare ad esse altro collocamento, per es. nelle pagg. 203-204, mentre quello attuale si giustifica solo come un ripiego per evitare più profondo rimaneggiamento: ciò può spiegare la nostra inavvertenza. B. L.

Oeuvres de G. Humbert publiées par le soins de P. HUMBERT et de G. JULIA. T. I, Paris, Gauthier-Villars, 1929, pagg. 556+IX, in 4°, frs. 150.

L'opera matematica di GIORGIO HUMBERT si è svolta, mediante circa 150 lavori, ininterrottamente dal 1881 al 1921 attraverso la teoria delle varietà algebriche — curve e superficie — la teoria delle funzioni abeliane e la teoria dei numeri. L'interesse geometrico ne fu il primo movente, diremo così, giovanile: la rappresentazione analitica ne fu il principale strumento, che si trasformò poi spontaneamente in oggetto di ricerca.

Nel campo geometrico, a parte alcune questioni metriche alquanto particolari, ma notevoli nondimeno per l'eleganza e precisione dei risultati, egli si occupò quasi esclusivamente della geometria sulle varietà, e il più frequentemente di classi particolari di varietà: curve di genere uno, superficie quartiche e iperellittiche, ecc.; nel campo delle funzioni abeliane mise in evidenza e studiò a fondo le funzioni abeliane singolari, da cui hanno poi prese le mosse le ricerche sulle matrici di RIEMANN che occuparono in anni recenti con tanto successo lo SCORZA ed altri geometri italiani; nella teoria dei numeri può, per molti riguardi, dirsi un continuatore di HERMITE.

La ricerca dell'HUMBERT muove in generale da problemi ben definiti e si distingue per la minuzia e l'accuratezza dell'analisi e la finitezza dei particolari, per l'eleganza e la chiarezza.

La collezione delle più importanti Memorie dell'HUMBERT, che la casa Gauthier-Villars si è accinta a darci, si presenta così piena d'interesse e degno monumento alla Memoria del geometra.

Questo primo volume contiene, insieme con una bella prefazione di P. PAINLEVÉ, un indice dei lavori dell'HUMBERT, classificati per argomenti, una analisi dei lavori medesimi fino a quelli del 1912 esposta dall'HUMBERT medesimo. Poi una scelta di 12 fra Memorie e Note dell'A., tutte di argomento geometrico, a partire dalla sua tesi di abilitazione sopra le curve di genere uno, continuando con una importante Memoria sulla applicazione delle funzioni fucsiane allo studio delle curve algebriche (in particolare a problemi di contatto), con due Memorie sulle applicazioni geometriche del teorema di ABEL e con alcune altre ricerche principalmente di natura metrica.

(ellebì)