TELESIO VOLPE-RINONAPOLI

Su alcune trascendenti intere le cui radici separano quelle della derivata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 221–224.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_221_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Su alcune trascendenti intere le cui radici separano quelle della derivata.

Nota di TELESIO VOLPE-RINONAPOLI (a Livorno).

Sunto. - *L'Autore estende la proprietà che hanno le radici delle funzioni intere semplici di separare quelle della derivata, ad altre classi di funzioni intere.*

Le funzioni trascendenti intere semplici e alcuni altri tipi di trascendenti intere a radici reali hanno la proprietà che tra due loro radici non aventi segno diverso è compresa una sola radice della derivata [1].

In questa nota estendo quella proprietà ad altri tipi più generali di funzioni di genere finito, che non sono stati considerati.

TEOREMA 1° [2] — Se la funzione trascendente intera $f(x)$ di rango p dispari ha tutte le radici c_h reali e il fattore esponenziale esterno $e^{\alpha x^{p+1}+\beta x^p+\gamma x^{p-1}+\delta}$ con $\alpha \leq 0$, β reale e $\gamma \geq 0$, tra due sue radici consecutive non aventi segno diverso [3] è compresa una sola radice della derivata.

Supposto che la $f(x)$ abbia anche una radice nulla d'ordine m si ha:

$$f(x) = e^{\alpha x^{p+1}+\beta x^p+\gamma x^{p-1}+\delta} x^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{x^k}{kc_h^k}}.$$

Derivando si ottiene:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = (p+1)\alpha + \frac{p\beta}{x} + \frac{(p-1)\gamma}{x^2} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p(x-c_h)}.$$

Ora se u e v sono due radici reali distinte e non nulle di $f'(x)$, si deve avere:

$$(p+1)\alpha + \frac{p\beta}{v} + \frac{(p-1)\gamma}{v^2} + \frac{m}{v^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p(v-c_h)} = 0$$

e:

$$(p+1)\alpha + \frac{p\beta}{u} + \frac{(p-1)\gamma}{u^2} + \frac{m}{u^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p(u-c_h)} = 0.$$

Sottraendo e sommando le due ultime eguaglianze si ha:

$$p\beta\frac{u-v}{uv} + (p-1)\gamma\frac{u^2-v^2}{u^2v^2} + m\frac{u^{p+1}-v^{p+1}}{u^{p+1}v^{p+1}} +$$

$$+ (u-v)\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p(u-c_h)(v-c_h)} = 0$$

[1] LAGUERRE, « Compt. Rend. Ac. des Sciences », tomo 94, 1882, pag. 635; CESARO, « Compt. Rend. Ac. des Sciences », tomo 99, 1884, pag. 26; « Giornale di Mat. di Battaglini », tomo 22, 1884, pag. 191; VIVANTI, « Giorn. di Mat. di Battaglini », tomo 22, 1884, pag. 243; « Rendiconti Istit. Lombardo », tomo 32, 1899, pag. 569; *Elementi funzioni analitiche*, Hoepli, 2ª ediz., n. 160, pag. 293.

[2] VIVANTI, *Stato attuale. Teoria funzioni intere.* « Atti Soc. Prog. Scienze », 1909; BIEBERBACH, « Encyclopedie der Math. Wiss. », Band. II, 3ª A., 1909-1921; VALIRON, « Mémorial des Scienc. Mathemat. », fasc. II, 1925.

[3] Una delle quali può esser perciò nulla.

e:

$$2(p+1)\alpha + p\beta\frac{u+v}{uv} + (p-1)\gamma\frac{u^2+v^2}{u^2v^2} + m\frac{u^{p+1}+v^{p+1}}{u^{p+1}v^{p+1}} +$$

$$+ (u+v)\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p}(u-c_h)(v-c_h)} - 2\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p-1}(u-c_h)(v-c_h)} = 0.$$

Eliminando $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p}(u-c_h)(v-c_h)}$ e risolvendo, si ottiene:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p-1}(u-c_h)(v-c_h)} = (p+1)\alpha - \frac{(p-1)\gamma}{uv} - m\frac{u^p - v^p}{u^p v^p(u-v)}.$$

Ora se u e v fossero comprese tra due radici consecutive di $f(x)$ non aventi segno diverso, l'eguaglianza precedente sarebbe assurda perchè avente il 1° membro positivo (per essere p dispari ed $(u-c_h)(v-c_h) > 0$ per qualunque h) ed il 2° membro negativo (perchè $uv > 0$, $\alpha < 0$, $\gamma > 0$ e p dispari) o nullo (se $\alpha = \gamma = m = 0$); ciò prova la tesi.

Nota. — Questo teorema comprende come casi particolari quelli noti delle funzioni semplici, di quelle di genere 1 e quindi anche di quelle di genere 0 che — com'è noto — si possono porre sotto forma di funzione di genere 1.

Teorema 2° — Se la funzione trascendente intera

$$f(x) = e^{\alpha(x)}x^m\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{kc_h^k}},$$

dove $\alpha(x) = a_0x^{p+n} + a_2x^{p+n-2} + \ldots + a_{n-2}x^{p+2} + a_{n-1}x^{p+1} + b_0x^p + b_2x^{p-2} + \ldots + b_{p-2}x^2 + b_p$, di rango p e genere $p+n$ pari, con: $a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}$ negativi o nulli, a_{n-1} reale e $b_0, b_2, \ldots, b_{p-2}$ positivi o nulli, ha tutte le radici reali, tra due sue radici consecutive non aventi segno contrario è compresa una sola radice della derivata.

Derivando si trae:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = (p+n)a_0x^{n-1} + (p+n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + (p+2)a_{n-2}x +$$

$$+ (p+1)a_{n-1} + \frac{pb_0}{x} + \frac{(p-2)b_2}{x^3} + \ldots + \frac{2b_{p-2}}{x^{p-1}} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p}(x-c_h)}.$$

Ora si riconosce che mentre x cresce tra due radici consecutive di $f(x)$ non aventi segno contrario, il secondo membro dell'ultima eguaglianza ha (per le ipotesi fatte) derivata sempre negativa e quindi varia decrescendo sempre da $+\infty$ a $-\infty$ e poichè $x^p f(x)$ ha, nell'intervallo considerato, segno costante risulta che tra le due radici cade una sola radice di $f'(x)$.

NOTA. — Mi sembra non privo d'interesse osservare che alcuni risultati da me stabiliti precedentemente [1] uniti a quelli conseguiti in questa nota, conducono al:

TEOREMA 3° — Le funzioni trascendenti intere, con radici c_h tutte reali e diverse da zero:

$$(1) \qquad f(x) = e^{\alpha x^p + \beta x^{p-1} + \gamma} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h{}^k}}$$

con p dispari, α reale e $\beta \geq 0$ e:

$$(2) \qquad f(x) = e^{\alpha x^{p+1} + \beta x^p + \gamma} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h{}^k}}$$

con $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq 0$ hanno la proprietà che anche la loro derivata ha tutte le radici reali e che tra due radici della funzione, consecutive e non aventi segno diverso, è compresa una sola radice della derivata.

Infatti per la (1) il Teorema risulta contenuto nel Teorema 5° del mio lavoro citato e nel Teorema 1° della presente Nota.

Per la (2) il Teorema risulta affermato nel Teorema 1° del lavoro citato e nei Teoremi 1° e 2° di questa Nota (secondochè p è dispari o pari).

[1] T. VOLPE-RINONAPOLI, *Sulle radici della derivata di alcune trascendenti intere*, questo « Bollettino », Aprile 1930.