BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO TRICOMI

Una formula pel calcolo dei grandi coefficienti binomiali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 215–217.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_215_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Una formula pel calcolo dei grandi coefficienti binomiali.

Nota di FRANCESCO TRICOMI (a Torino).

Sunto. - *Si trova un'espressione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ che ne consente un agevole calcolo numerico nel caso in cui, essendo n molto grande, il calcolo diretto sarebbe malcomodo.*

Avendo avuto di recente occasione di calcolare diversi coefficienti binomiali con il solo *numeratore* molto grande, mi sono accorto che, assai meglio della nota formula ricavata da quella di STIRLING per $n!$ che suole adoperarsi in questi casi, serviva l'altra che scaturisce dalle considerazioni seguenti, che pertanto mi sembrano meritevoli di essér fatte conoscere.

Supponiamo anzitutto che il *denominatore* k del coefficiente binomiale da calcolarsi sia *dispari*, caso a cui ci si può sempre ricondurre per mezzo dell'ovvia formula

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1},$$

e poniamo $k = 2m+1$; potremo allora scrivere

$$\binom{n}{2m+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots(n-2m+1)(n-2m)}{(2m+1)!},$$

da cui, associando i fattori estremi ed equidistanti dagli estremi e ponendo poi in evidenza $(n-m)^{2m+1}$, si ha

$$\binom{n}{2m+1} = \frac{[(n-m)^2-m^2][(n-m)^2-(m-1)^2]\ldots[(n-m)^2-1^2](n-m)}{(2m+1)!} =$$
$$= \frac{(n-m)^{2m+1}}{(2m+1)!}\left[1-\frac{1^2}{(n-m)^2}\right]\left[1-\frac{2^2}{(n-m)^2}\right]\ldots\left[1-\frac{m^2}{(n-m)^2}\right].$$

Ciò posto, osserviamo che i coefficienti delle varie potenze di $(n-m)^{-2}$ nello sviluppo del prodotto a secondo membro, non sono altro che le somme dei prodotti a 1 a 1, a 2 a 2,..., a m a m dei quadrati dei primi m numeri naturali; pertanto, indicatili rispettivamente con $k_{m,1}$, $k_{m,2}$,..., $k_{m,m}$, cioè, posto in generale:

(1) $$k_{m,r} = \Sigma\, \alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_r^2, \quad (\alpha_h = 1, 2, \ldots, m;\ h = 1, 2, \ldots, r),$$

dove il sommatorio è esteso a tutte le combinazioni di classe r: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ dei primi m numeri naturali, avremo senz'altro che

(2) $$\boxed{\binom{n}{2m+1} = \frac{(n-m)^{2m+1}}{(2m+1)!}\left[1-\frac{k_{m,1}}{(n-m)^2}+\frac{k_{m,2}}{(n-m)^4}-\ldots+(-1)^m\frac{k_{m,m}}{(n-m)^{2m}}\right]},$$

ch'è la formula che voleva stabilirsi.

L'interesse della (2) risiede sopratutto nel fatto che, se n è grande rispetto ad m, i termini entro la parentesi quadra vanno assai rapidamente decrescendo verso destra, sì che spesso con due o tre termini soltanto si ottiene già un valore sufficientemente approssimato del coefficiente binomiale da calcolarsi.

Quanto ai coefficienti k, essi si riconducono assai facilmente alle somme $S_t(m)$ delle t-esime potenze dei primi m numeri naturali (e quindi ai numeri di BERNOULLI) mediante note formule dell'algebra delle funzioni simmetriche, che in particolare forniscono:

$$(3)\quad \begin{cases} k_{m,1} = S_2(m), \quad 2!\, k_{m,2} = S_2^2(m) - S_4(m), \\ 3!\, k_{m,3} = S_2^3(m) - 3S_2(m)S_4(m) + 2S_6(m), \dots \end{cases}$$

Per esempio, nel caso di $n = 199$, $2m + 1 = 19$, essendo

$$k_{9,1} = 285, \quad k_{9,2} = 32946, \quad k_{9,3} = 1999370,$$

si ha:

$$\frac{k_{m,1}}{(n-m)^2} = 0{,}00789474\,; \quad \frac{k_{m,2}}{(n-m)^4} = 0{,}00002528\,; \quad \frac{k_{m,3}}{(n-m)^6} = 0{,}00000004,$$

sicchè, malgrado la poca grandezza di n, già coi soli termini fino a quello con $k_{m,2}$, dalla (2) si trae:

$$\mathrm{Log}\binom{199}{19} = 26{,}2077926$$

con 7 decimali esatte.