Enea Bortolotti

Connessioni proiettive

* III. Ulteriori sviluppi della teoria. Relazioni con la geometria proiettiva differenziale secondo Fubini

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 83–90.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_83_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Connessioni proiettive (*).

III. Ulteriori sviluppi della teoria. Relazioni con la geometria proiettiva differenziale secondo Fubini.

8. Dal 1928 ha inizio, ad opera di VEBLEN, un ultimo gruppo di ricerche sulle connessioni proiettive: ricerche di carattere specialmente critico, dirette cioè, soprattutto, a precisare le basi analitiche della teoria, e insieme a indagare l'essenza geometrica degli enti introdotti e delle questioni trattate.

In un lavoro del 1928 (**36**) il VEBLEN dà una trattazione di carattere prettamente analitico, la prima sotto questo riguardo veramente soddisfacente, della teoria delle connessioni proiettive.

Preliminarmente egli prende in esame la stessa nozione di *tensore proiettivo,* e giunge a caratterizzarla fondandosi su questa interessante osservazione: l'ordinaria teoria dei tensori (affini) in una varietà curva si basa in sostanza sul fatto che ogni trasformazione delle coordinate curvilinee u^r può approssimarsi, nell'intorno del 1° ordine di un punto P_0, mediante una *trasformazione lineare intera* $\left(\text{di coefficienti } (\theta^r_{.s})_0, \text{ ove } \theta^r_{.s} = \frac{\partial u^r}{\partial u'^s}\right)$. Ora: è possibile anche associare alla supposta trasformazione e al punto P_0 una ben determinata trasformazione lineare fratta, soddisfacente alle condizioni che: 1°) il gruppo Γ di queste trasformazioni lineari fratte sia isomorfo al gruppo g di tutte le trasformazioni; 2°) in questo isomorfismo a una trasformazione di g che sia lineare fratta corrisponda in Γ la trasformazione medesima.

La trasformazione ora detta è del tipo

$$v^r = \frac{(\theta^r_{.o})_0 + (\theta^r_{.s})_0\, v'^s}{(\theta^o_{.o})_0 + (\theta^o_{.s})_0\, v'^s},$$

(*) Ved. la parte prima nel tomo IX, fasc. 5, pp. 288-294 e la parte seconda nel fasc. 1 di questo tomo X, pp. 28-34.

ove

$$\theta^r_{.o} = 0, \quad \text{onde può supporsi} \quad \theta^o_{.o} = 1\,;$$

(16) $$\theta^r_{.s} = \frac{\partial u^r}{\partial u'^s}, \quad \theta^o_{.s} = \frac{\partial \theta}{\partial u'^s} = -\frac{1}{n+1}\frac{\partial \log \Delta}{\partial u'^s},$$

col solito significato per θ, Δ (n.i 3, 7). Sarà naturale assumere questi coefficienti $\theta^\alpha_{.\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n$) — i quali d'altra parte, introdotto accanto alle u^r un $(n+1)^{mo}$ parametro u^o che varî secondo la legge $u^o = u'^o + \theta = u'^o - \frac{1}{n+1} \log \Delta$, sono semplicemente le derivate $\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\beta}$ — quali coefficienti nelle formule di trasformazione dei *tensori proiettivi* (cfr. n^i 4, 7). Cambiando u^o in $-\frac{1}{n+1}u^o$ si ritrova la legge di trasformazione assunta da T. Y. THOMAS (n.^{o} 4).

Proseguendo in questo stesso ordine d'idee, VEBLEN perviene anche alla *connessione proiettiva*. Come i parametri Γ^r_{pq} di una connessione affine determinano, rispetto a un punto P_0 come polo, una totalità di sistemi coordinati (*affini normali*: ved. n.^{o} 3) ciascuno dei quali è univocamente determinato dal supposto sistema di coordinate curvilinee u^r e al mutare di questo varia per trasformazione lineare intera, di coefficienti $(\theta^r_{.s})_0$, così, se si vuole associare in modo unico al sistema u^r e al punto P_0 un sistema coordinato che al variare del sistema u^r varî per la ben determinata trasformazione lineare fratta di coefficienti $(\theta^\alpha_{.\beta})_0$ si è condotti a prendere in considerazione un sistema $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ i cui elementi per una trasformazione sulle u^r (e corrispondentemente, su u^o) varino secondo la legge

(17) $$\Pi'^\gamma_{\beta\lambda}\,\theta^\alpha_{.\gamma} = \Pi^\alpha_{\gamma\mu}\,\theta^\gamma_{.\beta}\,\theta^\mu_{.\lambda} + \frac{\partial \theta^\alpha_{.\beta}}{\partial u'^\lambda}, \qquad \left(\frac{\partial \theta^\alpha_{.\beta}}{\partial u'^o} = 0\right).$$

Il VEBLEN identifica appunto con *l'invariante* $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ *dotato di questa legge di trasformazione* l'ente « connessione proiettiva ». Il confronto delle (17) con le (12) n.^{o} 7 mostra che basta supporre, nelle (13) $q^o_{.o} = 1$, e (come per le (17) è lecito) $\Pi^\alpha_{\beta o} = 0$ perchè le $\Pi^\alpha_{\beta r}$ varino come le $\Lambda^\alpha_{\beta r}$ di SCHOUTEN: mentre se $\Pi^\alpha_{\beta o} = \delta^\alpha_\beta$, come suppone VEBLEN, le $\Pi^\alpha_{\beta r}$ variano come (qualunque ipotesi sia fatta su $q^o_{.o}$) le $L^\alpha_{\beta r}$. D'altra parte le (17) differiscono soltanto pel significato un po' diverso delle $\theta^o_{.r}$ dalle formule di trasformazione delle ${}^*\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ di T. Y. THOMAS (n.^{o} 4). Come queste, così anche le $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ di VEBLEN potranno dunque servire per costruire delle *derivate* *proiettive*, derivate covarianti di tensori proiettivi che sono nuovi tensori proiettivi.

È poi evidente la relazione fra questa teoria analitica e le vedute geometriche del CARTAN: interpretando le componenti d'un vettore proiettivo controvariante x^α (date anche a meno d'un comune fattore) come coordinate proiettive di un punto dello spazio tangente, le equazioni

$$dx^\alpha + \Pi^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta du^\gamma = 0 \tag{18}$$

definiscono un trasporto infinitesimale dei punti degli spazi tangenti che (supponendosi $\Pi^\alpha_{\beta 0} = \delta^\alpha_\beta$) *non dipende dal valore di* du^0 ma soltanto da quelli delle du^r, e dunque non differisce da un trasporto del tipo (7): cioè le $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ dànno luogo proprio ad una connessione proiettiva nel senso di CARTAN; anzi, ad una *qualunque* connessione proiettiva.

9. Le vedute del VEBLEN cui abbiamo ora accennato si collegano assai da vicino con quelle espresse dal WEYL in un lavoro del 1929 (**43**, ved. anche **42**): contenente un'analisi approfondita delle nozioni che stanno a base della geometria differenziale per gli spazi « a connessione ». Il problema fondamentale di questa geometria è enunciato dal WEYL come il problema di « associare univocamente a un sistema coordinato arbitrario sulla varietà un sistema coordinato *normale* sullo spazio tangente, mediante i parametri della connessione » (**42**, p. 686 ([20])). Pel caso delle connessioni proiettive si tratterà di fissare dei sistemi proiettivi di riferimento sugli spazi proiettivi tangenti. Il WEYL, partendo da certe condizioni geometriche (sostanzialmente equivalenti alle (9), n.° 5) ritrova, come era naturale, e precisa il risultato già stabilito a questo proposito dal CARTAN (n.° 5) e osserva che esso vale, in certo senso, a *inserire* (imbed) nella varietà lo spazio tangente (che primitivamente è pensato, secondo CARTAN (ved. ([13])) come uno spazio proiettivo arbitrario associato al punto variabile della X_n).

Uno studio comparativo ampio e minuzioso delle teorie (già accennate) di CARTAN, di T. Y. THOMAS, di VEBLEN e di WEYL è contenuto in un lavoro recente (pure già menzionato: **46**) di SCHOUTEN (e ST. GOLAB), insieme a una trattazione assai generale e completa

([20]) In realtà si può anche procedere diversamente, e cioè lasciare libera la scelta dei riferimenti negli spazi tangenti: ma allora bisognerà prendere in considerazione il caso in cui questi riferimenti vengano comunque trasformati, e attribuire un significato geometrico soltanto agli enti che per queste trasformazioni hanno carattere d'invarianza. (Ved. n.i 7, 10).

dell'intera teoria, tale da contènere come casi particolari tutte le precedenti. Va notato particolarmente lo studio accurato sui *tensori proiettivi* e le relative operazioni differenziali. Qui come coefficienti nelle formule di trasformazione dei tensori si assumono le $\theta^{\alpha}_{.\beta}$ di VEBLEN anzichè le $q^{\alpha}_{.\beta}$ (n.° 7) ([21]), considerando però anche il caso delle *densità tensoriali proiettive* (Punktgrössendichten), di *peso* M qualunque, per le quali nei secondi membri delle formule di trasformazione si ha anche un fattore Δ^M (cfr. VEBLEN, **36**, p. 157 e seg.). Per queste grandezze tensoriali accanto alle *derivate covarianti* costruite con le $\Lambda^{\alpha}_{\beta r}$ (n.° 7) esistono anche delle *derivate proiettive*, ottenute completando a partire dalle $\Lambda^{\alpha}_{\beta r}$ un sistema $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ col porre $\Lambda^{\alpha}_{\beta o}=0$ (cfr. n.° prec.); i corrispondenti *differenziali assoluti* invece non esistono che pei *vettori* proiettivi controvarianti o covarianti di peso $\frac{1}{n+1}$ o $-\frac{1}{n+1}$, rispettivamente (**46**, p. 208): o meglio, per le altre grandezze tensoriali, anche introdotto un $(n+1)^{mo}$ parametro u^o al modo di T. Y. THOMAS o di VEBLEN, il differenziale corrispondente alla derivata proiettiva resta essenzialmente dipendente dalla scelta di u^o (ved. **46**, p. 207, nota ([23])).

10. Secondo le ora accennate formulazioni di VEBLEN, WEYL e SCHOUTEN, si fa dipendere la scelta dell'iperpiano fondamentale $x^o=0$ del riferimento proiettivo associato al punto variabile della X_n nel corrispondente spazio tangente — o almeno, il modo di variare di questo iperpiano — dal sistema di coordinate curvilinee. Ma questa subordinazione non appare sempre la meglio appropriata. Ad es. lo stesso VEBLEN, proponendosi nel 1929 lo studio delle connessioni proiettive nelle varietà *proiettivamente piane* (cfr. n.i 2, 4) — studio proseguito poi nel suo indirizzo dal WHITEHEAD: **48**, **49** — ha constatato come fosse più opportuno legare il modo di variare dell'iperpiano $x^o=0$ ad un parametro che varia per una *arbitraria* funzione scalare addittiva del punto sulla X_n; parametro che diremo, col WHITEHEAD, semplicemente il *fattore*. Ad analoga osservazione si è condotti se ci si propone (**51**; n.° 12) lo studio delle

([21]) Veramente SCHOUTEN sostituisce alle (9) a) e alle (13) del 3° gruppo le condizioni più generali $\Lambda^s_{or}=c\delta^s_r$, $q^o_{.r}=\frac{1}{c}q^o_{.o}\frac{\partial\theta}{\partial u^r}$, ($c\neq 0$ cost. arbitr.), sì da comprendere, per $c=-\frac{1}{n+1}$, anche la teoria di T. Y. THOMAS. Mi riferisco qui alla formulazione seguita da SCHOUTEN nella II parte e nei §§ 4 e seg. della I parte del lavoro (**46**); quella da lui inizialmente adottata (I parte, p. 195 e seg.) è alquanto più generale e più complessa.

connessioni proiettive nelle ipersuperficie di S_n proiettivo; allora il *fattore* u^o — o, più esattamente, e^{-u^o} — può identificarsi col fattore arbitrario delle coordinate proiettive omogenee in S_n sulla X_{n-1}.

Non posso qui diffondermi sulla nuova trattazione, così originata, della teoria delle connessioni proiettive ad opera del VEBLEN (**41**): già da lui stesso e dal WHITEHEAD posta a base di ulteriori interessanti ricerche su di una generalizzazione delle forme quadratiche differenziali (**44**), su di una interpretazione geometrica della «relatività» 5-dimensionale di T. KALUZA ed O. KLEIN (**47**), su certe *rappresentazioni normali* delle connessioni proiettive (**53**; ved. ([25])). Mi limiterò a dire che la legge di trasformazione per le componenti dei tensori proiettivi è, in questa teoria, basata sulle formule

$$(19) \qquad u^r = u'^r(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n), \qquad u^o = u'^o + \log \rho(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n);$$

che la considerazione dei tensori di peso M qualunque (VEBLEN, **36**, e SCHOUTEN, **46**) viene sostituita con la considerazione dei tensori di peso 0, ma le cui componenti contengono u^o, entro un comune fattore e^{Mu^o} (tensori d'*indice* M: **44**, p. 61 ([22])); infine, che in questa sua più recente trattazione il VEBLEN pone chiaramente in relazione il suo punto di vista con quello del CARTAN, osservando in particolare come sullo *spazio tangente* (che pel VEBLEN è senz'altro lo spazio *affine* tangente: ved. **41**, p. 152 e **44**, p. 60, e cfr. ([13])) venga fissato un sistema di coordinate proiettive quando si assegni uno scalare A di indice 1 (**44**, pp. 61-62 ([23])).

11. In un mio lavoro in corso (**51**; ved. anche **50**) ho esposto una ricostruzione della teoria delle connessioni proiettive nei suoi punti essenziali (con applicazioni di cui dirò al n.° seg.); basata principalmente su questa veduta: le x^α ed hx^α rappresentando diversi *vettori proiettivi* ma lo stesso *punto* dello spazio tangente, se interpretiamo un sistema $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ dotato dalla legge di trasformazione (17) di VEBLEN e T. Y. THOMAS come sistema dei parametri di una connessione affine $(n+1)$-dimensionale, le proprietà della corrispondente connessione proiettiva saranno tutte e sole *le proprietà di questa connessione affine invarianti per le trasformazioni che conser-*

([22]) Questa nozione si collega da vicino a quella dei *tensori di classe M* secondo SCHOUTEN e HLAVATY (**40**): ved. **51**. Cfr. anche NEWMAN, **32**.

([23]) Ciò equivale ad assumere, nella formule della nota ([14]): $c^r_{\cdot s} = \delta^r_s$, $c^o_{\cdot s} = \dfrac{\partial \log A}{\partial u^s}$.

vano il parallelismo. Vi è dunque la possibilità di applicare, pressochè inalterati, alla teoria attuale i risultati di una mia ricerca sulle trasformazioni, del tipo ora detto, delle connessioni affini (**45**, **50**). In particolare (cfr. **45**, p. 78) avremo per una connessione proiettiva un sistema di *parametri normalizzati*, $P^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{1}{n}\,\delta^{\alpha}_{\beta}(\Pi^{\delta}_{\gamma\delta} - \Pi^{\delta}_{\delta\gamma})$, *univocamente determinati* dalla connessione, a differenza delle $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$, ma dotati della stessa legge di trasformazione delle $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Non aggiungerò altro sulla parte generale di questa ricerca, in cui mi sembra che la teoria, insieme a svariati complementi (relativi ad es. alla determinazione delle condizioni perchè una connessione proiettiva sia affine), riceva anche la più razionale sistemazione.

12. Dirò invece, per terminare, qualche cosa su di una interessante questione (pure presa in esame nel lav. **51** detto sopra): *quella delle relazioni fra la teoria delle connessioni proiettive e la geometria delle varietà immerse in ambiente proiettivo.* Si comprende bene come questo sia un collegamento indispensabile: per arrivare a comprendere veramente il significato della nuova teoria occorre vedere come essa si inquadri nel sistema della geometria classica. L'inquadramento si raggiunge abbastanza semplicemente, e il risultato non è privo d'interesse; se pure. sotto certi riguardi, un po' sconcertante!

Già il CARTAN fino dal 1924 (**8**) aveva osservato che, per una superficie di S_3 proiettivo, si può ottenere un raccordo proiettivo fra i piani tangenti in punti infinitamente vicini P, P^*, mediante proiezione fatta da un punto Q *(polo normale)* posto fuori del piano tangente in P. E quindi si può determinare sulla superficie una connessione proiettiva, subordinata a un assegnato campo di punti Q, associati ai punti P della superficie. Naturalmente la connessione proiettiva avrà un effettivo significato geometrico per la superficie soltanto quando l'associazione dei punti Q ai punti P sia fatta in modo *intrinseco* alla superficie, e *invariante* per proiettività in S_3: ad es. i punti Q potranno essere i punti indicati con $X\left(=\frac{1}{2}\Delta_2 x\right)$ dal FUBINI, o le ulteriori intersezioni delle normali proiettive con le quadriche di LIE. Io ho generalizzato questa costruzione nel 1927 (**28**) mostrando come si possa subordinare una connessione proiettiva su di una X_m di S_n a un campo di S_{n-m-1}; e ho osservato che in ogni caso le geodetiche di una tale connessione sono *sistemi pluriassiali* del BOMPIANI (ved. **27**). Nel lav. **51** sopra citato ho mostrato come convenga introdurre una « connessione proiettiva » anche entro lo stesso campo degli S_{n-m-1} associati ai punti della X_m, e come questa varietà possa intrinsecamente rappresentarsi, *mediante le due connessioni proiettive ora dette e due tensori* (di curvatura euleriana), tali soltanto da soddisfare certe equazioni che generalizzano quelle classiche di GAUSS, CODAZZI, KÜHNE, nel gruppo delle proiettività dell' S_n ambiente.

Ho studiato più ampiamente il caso delle *ipersuperficie* di S_n Per queste la connessione nel campo degli S_0 (poli) associati ai punti della X_{n-1} è *integrabile* se i poli Q sono presi sulle rette di una congruenza *coniugata* all'ipersuperficie, che dirò *congruenza delle pseudonormali* (e allora soltanto). Allora per la rappresentazione dell'ipersuperficie nel gruppo delle proiettività di S_n ci si può ridurre a *una connessione proiettiva* (subordinata nella X_{n-1} dal supposto campo di punti Q) e ad un *tensore affine simmetrico* ω_{rs}, tale che $\omega_{rs}du^r du^s = 0$ rappresenti, in ciascun punto della X_n, le direzioni asintotiche. Tali enti dànno luogo agevolmente, con una costruzione assai diversa da quelle già note, *alle tre forme fondamentali del Fubini*; e inversamente, essi possono ottenersi da queste. Invece alle prime due forme del FUBINI date anche a meno d'un comune fattore, cioè, all'*elemento lineare proiettivo*, equivale il sistema formato dall'equazione $\omega_{rs}du^r du^s = 0$ delle asintotiche e dalla *connessione affine* subordinata nella X_{n-1} da una congruenza coniugata a questa, relativamente agli S_{n-2} polari delle rette della congruenza rispetto alle quadriche di CECH, presi negli S_{n-1} tangenti come iperpiani impropri. Se si osserva che dare un'equazione di MONGE $\omega_{rs}du^r du^s = 0$ è lo stesso che assegnare una *connessione conforme normale*, secondo CARTAN ([24]), si può concludere che:

La geometria delle ipersuperficie di S_n *nel gruppo proiettivo equivale alla teoria degli invarianti simultanei di una connessione proiettiva e di una connessione conforme normale. La geometria delle ipersuperficie nel gruppo delle deformazioni proiettive equivale alla teoria degli invarianti simultanei di una connessione affine e di una connessione conforme normale.*

Ma se soltanto la *connessione proiettiva* subordinata a un campo di punti è assegnata, *nessuna delle forme del Fubini risulta individuata*: per giungere ad esse e cioè all'ordinaria geometria proiettiva delle ipersuperficie di S_n è essenziale introdurre un elemento che risulta dal confronto della connessione con la geometria dell'ambiente: *la nozione di asintotiche.*

La geometria delle proprietà invarianti per le trasformazioni che conservano la connessione proiettiva è dunque, entro la classe

([24]) Ved. CARTAN, *Les espaces à connexion conforme.* (« Annales de la Soc. Polon. de Mathém. », t. II, 1923, pp. 171-221; ved. pp. 194-195).

delle proprietà proiettive, una sottoclasse profondamente diversa da quelle studiate finora: in particolare, essenzialmente distinta dalla sottoclasse delle proprietà invarianti per deformazione proiettiva secondo FUBINI.

Il miglior augurio che si possa fare alla nuova teoria è, credo, quello di recare alla nostra conoscenza della geometria proiettiva un contributo paragonabile a quello che le geniali vedute del FUBINI vi hanno apportato [25].

ENEA BORTOLOTTI

[25] *Complementi alla Bibliografia* data nella nota [1] parte I:
13bis. É. CARTAN: *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés.* « Acta Mathem. », 48, 1925, 1-42: ved. 37-41. — **20**bis. J. A. SCHOUTEN: *Ueber die Projektivkrümmung und Konformkrümmung halbsymmetrischer Uebertragungen.* Kazani, « In mem. Lobatschewskii », 2, 1926, 90-98. — **26**bis. É. CARTAN: *La géométrie des groupes de transformations.* « Journal de Mathém. », 6, 1927, 1-119: ved. 104-118. — **52.** L. P. EISENHART: *Projective normal coördinates.* « Proceedings Nat. Acad. », 16, 1930, 731-740. — **53.** J. H. C. WHITEHEAD: *A method of obtaining normal representations for projective connections.* « Ibid. », 754-760.

Il lavoro **48** è stato pubblicato nei « Proceed. London Mathem. Soc. », (2), 32, 1931, 93-114: **50** negli « Annals of Mathematics », 32, 1931, 361-377.

Per evitare erronee interpretazioni, avvertiamo che il sistema indicato con r_{pqs} nella parte I (n.° 3: ved. [2] e [12]) è quello indicato con H_{spq} da EISENHART (**31**, p. 100) e con $(n-1)r_{sqp}$ da VEBLEN e J. M. THOMAS (**23**, p. 287).