Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Sbrana

Sulla validità del teorema di Bernoulli per un fluido reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 77–78.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sulla validità del teorema di Bernoulli per un fluido reale.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

Sunto. - *In questa Nota vengono precisate le condizioni necessarie e sufficienti per la validità della formula di* BERNOULLI, *relativa ad un fluido, con densità funzione della pressione, soggetto a forze di massa conservative e animato di moto permanente.*

1. Per un fluido perfetto, con densità funzione della pressione, soggetto a forze di massa conservative, e animato di moto permanente, vale il noto teorema di BERNOULLI, secondo il quale si ha

$$U - \frac{1}{2}v^2 - \int \frac{dp}{\rho} = \text{costante}, \tag{1}$$

lungo ogni linea di flusso, essendo U il potenziale unitario delle forze di massa, v la velocità, p la pressione, e ρ la densità, corrispondenti alla particella fluida che circonda un generico punto P dello spazio occupato dal fluido. Il valore della costante è identico per tutte le linee di flusso soltanto se il moto è irrotazionale, o di BELTRAMI (¹).

Perciò se il fluido è indefinitamente esteso, e il moto irrotazionale all'infinito, il secondo membro della (1) potrà avere un valore fisso per tutta la massa fluida, soltanto quando il fluido sia in quiete all'infinito, o, in caso contrario, quando il moto sia irrotazionale, nella zona che contiene linee di flusso estendentisi indefinitamente (²).

2. Consideriamo invece un fluido reale, per il quale sussistano le altre ipotesi ammesse in principio. In conseguenza di ciò, l'equazione indefinita del moto diviene

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \nu \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi, \tag{2}$$

con

$$\Phi = U - \frac{1}{2}v^2 - \int \frac{1}{\rho}\, d[p - (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \boldsymbol{v}].$$

(¹) Cfr. PIETRO BURGATTI, *Sopra un paradosso nella teoria del moto uniforme di un solido immerso in un fluido perfetto.* Nota letta alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Sessione del 27 maggio 1917; UMBERTO CISOTTI, *Considerazioni sulla nota formula idrodinamica di Daniele Bernoulli.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno II, pp. 125-128.

(²) Cfr. P. BURGATTI, loco citato.

essendo ν il coefficiente di viscosità cinematica, uguale a $\frac{\mu}{\rho}$, λ e μ le due costanti di LAMÉ, relative al fluido (1). Si riconosce subito che si potrà avere

$$\Phi = \text{costante} \tag{3}$$

lungo ogni linea di flusso, soltanto quando sussista la condizione cinematica

$$\text{rot}^2 v \times v = 0. \tag{4}$$

Inversamente, quando vale la (4), moltiplicando scalarmente per v la (2), si trova verificata la (3) lungo ogni linea di flusso.

Proponiamoci ora di ricercare se è possibile che il secondo membro della (3) abbia un valore fisso per tutta la massa fluida, e quindi che l'equazione indefinita (2) si riduca all'altra

$$\text{rot}\, v \wedge v + \nu\, \text{rot}^2 v = 0. \tag{5}$$

Calcolando la divergenza del primo membro di questa, si trova che dev'essere

$$\text{rot}^2 v \times v - (\text{rot}\, v)^2 = 0. \tag{6}$$

Dal confronto della (4) con la (6) si trae che il moto è irrotazionale. Possiamo dunque affermare che *se per un fluido reale soggetto a forze di massa conservative, con densità funzione della pressione, e animato di moto permanente, vale la* (3), [*essendo il secondo membro una costante assoluta*], *necessariamente il moto è irrotazionale.*

Si osservi poi che se il fluido si trova in un ambiente limitato, ogni moto (regolare) permanente è necessariamente vorticoso; e la stessa circostanza si verifica quando il fluido si estenda indefinitamente, e la velocità si annulli all'infinito, di ordine opportuno (rispetto alla distanza delle particelle fluide da un punto fisso arbitrario) (2).

Se dunque sussiste una qualunque di queste ultime due ipotesi, (oltre quelle già ammesse precedentemente), la (3), (*col secondo membro costante per tutta la massa fluida*), può aver luogo soltanto quando il fluido è in quiete.

(1) Cfr., p. es., BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale* II, p. 63. È chiaro che la funzione Φ si riduce al trinomio di BERNOULLI, se il fluido è incompressibile.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Sul carattere necessariamente vorticoso dei moti regolari, permanenti, di un fluido qualsiasi in ambienti limitati, oppure in quiete all'infinito.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno II, pp. 170-172.