Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Angelo Quarleri

Sul problema dinamico dei sistemi vincolati con riguardo alla sua riduzione all'analogo problema dei sistemi liberi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 70–73.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_70_0>

Sul problema dinamico dei sistemi vincolati con riguardo alla sua riduzione all'analogo problema dei sistemi liberi.

Nota di ANGELO QUARLERI (a Cagliari).

Sunto. - *Vengono esposte alcune considerazioni sul classico problema della determinazione delle reazioni che si esercitano sopra un sistema (vincolato) materiale in movimento, giungendo ad una espressione esplicita di esse.*

In una Nota dei « Rendiconti dei Lincei » (2° semestre 1930, VIII, pag. 307) il sig. E. GUGINO tratta del problema della determinazione delle eventuali reazioni vincolari relative ad un sistema materiale in movimento, con riguardo alla ben nota circostanza, di origine classica (¹), ottenuta in forma generale dal MAGGI, la quale consiste nell'essere le predette reazioni esprimibili *a priori*, e cioè senza la preventiva conoscenza del moto, in funzione soltanto della configurazione del sistema, delle velocità simultanee dei suoi punti. e del tempo. (Cfr. la *Dinamica dei sistemi* del MAGGI, nel Capitolo « Cinetostatica »).

Cogliendo occasione dalla lettura della predetta Nota, giova anzitutto osservare che il procedimento del KIRCHHOFF riviene a questo:

Si consideri, per fissare le idee, il caso di un solo punto materiale, di *massa unitaria*, e di una sola equazione vincolare:

$$\beta + b \times \dot{P} = 0, \tag{1}$$

(¹) Vedansi, per fissare le idee, le « Vorlesungen über analytische Mechanik » del KIRCHHOFF (zweite Vorlesung).

nella quale, naturalmente, la β ed il vettore $\boldsymbol{b}$ sono (in generale) funzioni del posto e del tempo. Riguardo agli spostamenti virtuali avremo di conseguenza:

(2) $$\boldsymbol{b} \times \delta P = 0.$$

D'altra parte, designando con $\boldsymbol{R}$ la reazione, si ha per noi

(3) $$\boldsymbol{R} \times \delta P = 0.$$

Dovendo la (3) sussistere per qualunque δP soddisfacente alla (2) ne viene:

$$\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{b}.$$

Poi, derivando, con KIRCHHOFF, la (1) rispetto al tempo, e sostituendo al posto della $\frac{d^2P}{dt^2}$ l'espressione

$$\boldsymbol{F} + \lambda \boldsymbol{b},$$

in cui il vettore $\boldsymbol{F}$ rappresenta la forza direttamente applicata, si ottiene una equazione per il ricavo della λ; la quale λ (con la solita ammissione relativa alla $\boldsymbol{F}$) risulta, naturalmente, espressa in funzione del posto, della velocità del punto materiale e del tempo.

Considerazioni analoghe sussistono, come è noto, anche nel caso di un sistema vincolato di tipo generale.

Nel caso generale, designando con n il numero dei punti del sistema, avremo invece della (1):

(4) $$\beta_h + \sum_{1}^{n}{}_i\, \boldsymbol{b}_{ih} \times \dot{P}_i = 0. \qquad (h = 1, 2,\ldots, l):$$

sistema di l equazioni (vincolari) tra loro indipendenti, nelle quali le β_h ed i vettori $\boldsymbol{b}_{ih}$ sono funzioni del posto e del tempo soltanto.

Ricordiamo che le equazioni fondamentali della Dinamica possono assumere, vettorialmente, la forma seguente:

(5) $$\boldsymbol{a}_i = \frac{1}{m_i} \boldsymbol{F}_i + \frac{1}{m_i} \sum_{1}^{l}{}_h\, \lambda_h \boldsymbol{b}_{ih}, \qquad (i = 1, 2,\ldots, n).$$

Derivando le (4) rispetto al tempo si ottiene:

(6) $$\frac{d\beta_h}{dt} + \sum_{1}^{n}{}_i \left(\boldsymbol{b}_{ih} \times \boldsymbol{a}_i + \frac{d\boldsymbol{b}_{ih}}{dt} \times \dot{P}_i \right) = 0, \qquad (h = 1, 2,\ldots, l).$$

Il termine $\sum_{1}^{n}{}_i \frac{d\boldsymbol{b}_{ih}}{dt} \times \dot{P}_i$ può esplicitarsi come segue:

(7) $$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{d\boldsymbol{b}_{ih}}{dt} \times \dot{P}_i = \sum_{1}^{n}{}_{ji} \frac{\partial \boldsymbol{b}_{ih}}{\partial P_j} \dot{P}_j \times \dot{P}_i + \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial \boldsymbol{b}_{ih}}{\partial t} \times \dot{P}_i, \quad (h = 1, 2,\ldots, l).$$

Anche il termine $\frac{d\beta_h}{dt}$ può mettersi sotto forma esplicita.

$$(7') \qquad \frac{d\beta_h}{dt} = \sum_1^n {}_i \operatorname{grad}_{P_i} \beta_h \times \dot{P}_i + \frac{\partial \beta_h}{\partial t}, \qquad (h=1, 2,..., l).$$

Il significato delle notazioni usate nelle (7) e nelle (7′) è ben noto. (Cfr. per es., *Analisi vettoriale generale* di BURALI-FORTI e MARCOLONGO).

Sostituendo, nelle (6), alle $\boldsymbol{a}_i$ i secondi membri delle (5), e tenendo presenti le (7) e le (7′), si ottengono le equazioni:

$$(8) \qquad \sum_1^n {}_i \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{ih} \times \sum_1^l {}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_{ik} + \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{b}_{ih}}{\partial P_j} \dot{P}_j \times \dot{P}_i +$$

$$+ \sum_1^n {}_i \left\{ \left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_{ih}}{\partial t} + \operatorname{grad}_{P_i} \beta_h \right) \times \dot{P}_i + \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{ih} \times \boldsymbol{F}_i \right\} + \frac{\partial \beta_h}{\partial t} = 0, \quad (h=1, 2,..., l).$$

Indicando, brevemente, con C_h gli ultimi *tre* addendi delle (8) e con A_{hk} lo scalare:

$$\sum_1^n {}_i \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{ih} \times \boldsymbol{b}_{ik} \qquad (h, k=1, 2,..., l)$$

si perviene subito al sistema di l equazioni lineari non omogenee nelle λ_k:

$$(9) \qquad \sum_1^l {}_k A_{hk} \lambda_k + C_h = 0, \qquad (h=1, 2,..., l),$$

quale figura, come risultato finale, nella sucitata Nota del sig. GUGINO (pag. 312); risultato contenuto in quello del MAGGI. Il relativo determinante risulta diverso da zero. Invero basta osservare (seguendo il MAGGI) che esso eguaglia il quadrato della matrice dei coefficienti delle equazioni (4) (prese in forma cartesiana) divisi per costanti uguali per tutti gli elementi di una stessa colonna. Esso pertanto coincide con la somma dei quadrati dei minori di ordine l di codesta matrice divisi per costanti. Ora, di questi minori, uno almeno è diverso da zero.

Risolvendo questo sistema si giunge alle espressioni seguenti:

$$\lambda_k = \sum_1^l {}_h B_{hk} C_h, \qquad (k=1, 2,..., l),$$

in cui, evidentemente, le B_{hk} sono funzioni della configurazione del sistema e del tempo soltanto.

Esplicitando le C_h, otteniamo:

$$\lambda_k = \sum_1^l{}_h B_{hk} \left\{ \sum_1^n{}_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{b}_{ih}}{\partial P_j} \dot{P}_j \times \dot{P}_i + \right.$$

$$\left. + \sum_1^n \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_{ih}}{\partial t} + \mathrm{grad}_{P_i} \beta_h \right) \times \dot{P}_i + \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{ih} \times \boldsymbol{F}_i \right] + \frac{\partial \beta_h}{\partial t} \right\}, \quad (k=1, 2,\ldots, l).$$

Infine, potremo scrivere in modo conciso:

$$\lambda_k = \sum_1^n{}_{ij} \xi_{ijk} \dot{P}_j \times \dot{P}_i + \sum_1^n{}_i (\boldsymbol{u}_{ik} \times \dot{P}_i + \boldsymbol{w}_{ik} \times \boldsymbol{F}_i) + \mu_k, \quad (k=1, 2,\ldots, l),$$

dove, naturalmente le omografie ξ_{ijk}, i vettori $\boldsymbol{u}_{ik}$ e $\boldsymbol{w}_{ik}$ e gli scalari μ_k sono funzioni, solamente, della configurazione del sistema e del tempo.