Enea Bortolotti

Trasporti rigidi e geometria delle varietà anolonome

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.1, p. 5–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_5_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

Trasporti rigidi e geometria delle varietà anolonome.

Nota di ENEA BORTOLOTTI (a Cagliari).

Sunto. - *L'A. indica una caratterizzazione geometrica di un trasporto rigido dei vettori in* V_n *in relazione con una* m-*pla di congruenze ortogonali* ($m \leq n-1$), *definito dalla prof.ª* NALLI; *mette in evidenza i rapporti con lo studio delle* V_n^m *anolonome, e con altri tipi di trasporto definiti, per le* V_n^m, *da* SYNGE *e da* VRANCEANU, *di cui dà pure caratterizzazioni; ne trae infine la definizione e alcune proprietà di quello che appare essere* il più semplice *trasporto rigido in* V_n, *in relazione con una* V_n^m *assegnata.*

1. La prof.ª NALLI ha definito, in una Nota recente (1), un trasporto rigido dei vettori lungo una curva γ di una V_n, in relazione ad r gruppi ($r \geq 1$) di vettori unitari, formanti due a due prodotti scalari costanti lungo γ. A questo trasporto rigido corrisponde una derivazione lineare dei vettori, « derivazione generalizzata lungo γ », che l'A. ha anche esteso (2) (limitatamente al

(1) *Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate.* « Rendiconti Accad. dei Lincei », ser. 6ª, vol. X, 1929, pp. 565-569.

(2) Nella Nota: *Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann.* « Ibid. », vol. XI, 1930, pp. 265-268.

caso, $r=1$, di *un solo gruppo* di m vettori, $1 \leq m \leq n-1$: al quale caso del resto ci si può sempre ricondurre) anche a *tensori* qualunque. Ma ciò che più interessa è *la possibilità di associare a ciascuna* m–*upla ortogonale di congruenze di linee di* $\mathrm{V_n}$ ($\mathrm{m} \leq \mathrm{n}-1$) *un ben determinato trasporto rigido di vettori, in cui le linee dell'*m–*upla sono autoparallele:* come nei casi estremi, già noti, $m=1$ ed $m=n-1$, in cui si ritrovano il trasporto rigido lungo una curva secondo FERMI (o meglio, la immediata generalizzazione di questo indicata da me e dalla prof.ª NALLI (3)) e il trasporto integrabile (o assoluto) del VITALI, recentemente ritrovato da EINSTEIN (4). La cosa interessa particolarmente per gli evidenti punti di contatto che queste ricerche hanno con la teoria analitica dei sistemi pfaffiani e con la teoria meccanica dei sistemi anolonomi.

Era prevedibile che anche per m qualunque (come nei due casi sopra ricordati) dovesse esservi una semplice caratterizzazione geometrica del trasporto rigido in parola: e infatti ho trovato che, decomposto il vettore trasportato ξ nei suoi componenti ξ', tangenziale alla V_n^m anolonoma definita in V_n dal campo di m–direzioni contenenti in ciascun punto le direzioni delle linee dell'm–upla, e ξ'', normale a V_n^m (5), ξ' varia mantenendo inalterate le sue componenti nelle m direzioni dell'm–upla, e ξ'' varia in modo che il suo vettore derivato (assoluto) in V_n lungo la curva di trasporto si mantiene tangenziale a V_n^m. In sostanza: le leggi di trasporto per ξ' e per ξ'' sono le dirette generalizzazioni alle V_n^m del trasporto integrabile secondo VITALI in una V_m, e del trasporto parallelo relativo a V_m dei vettori *normali* a una V_m in V_n, da me definito come naturale complemento del trasporto di LEVI-CIVITA

(3) Ved. il mio lavoro: *Leggi di trasporto nei campi di vettori applicati ai punti di una curva o di una* $\mathrm{V_m}$ *in* $\mathrm{V_n}$ *riemanniana.* (« Mem. Accad. Bologna », ser. 8ª, t. VII, 1929-30, pp. 11-20), p. 15; e loc. cit. (1), p. 568.

(4) Si vedano, anche per la bibliografia, le mie Note: *Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine, e nuove vedute sulla relatività.* « Mem. Accad. Bologna », ser. 6ª, t. VI, 1928-29, pp. 45-58, e: *Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche per una recente teoria di Einstein.* « Rendiconti Accad. Lincei », ser. 6ª, vol. IX, 1929, pp. 530-538.

(5) La notazione V_n^m è quella introdotta da G. VRANCEANU. Ved. la Memoria: *Studio geometrico dei sistemi anolonomi,* « Annali di Matem. », ser. 4ª, t. VI, 1928-29, pp. 9-43, ove sono anche citati alcuni degli altri numerosi lavori dell'A. sull'argomento. Ricordo che nel caso d'*olonomia,* cioè quando il sistema pfaffiano delle equazioni traducenti i vincoli è illimitatamente integrabile, la V_n^m si riduce a un sistema di ∞^{m-n} V_m di V_n.

per i vettori *tangenziali* alla V_m (6): a questi si riducono nel caso d'olonomia.

Già altre leggi di trasporto dei vettori per una V_n^m erano state indicate da G. VRANCEANU (loc. cit.) e da J. L. SYNGE (7). La « parallel propagation » secondo SYNGE (loc. cit.) è per i vettori tangenziali a V_n^m, *ma soltanto per essi*, un trasporto rigido; ne è un caso particolare il « trasporto parallelo in V_n^m », definito soltanto lungo direzioni di V_n^m, dei vettori di V_n^m secondo VRANCEANU (loc. cit., p. 21). Questo trasporto secondo SYNGE e VRANCEANU pei vettori di V_n^m generalizza quella di LEVI-CIVITA per le V_m, conservandone le principali proprietà; particolarmente esso è caratterizzato dal fatto che, lungo la linea di trasporto, il differenziale (assoluto) in V_n del vettore trasportato è normale alla V_n^m.

Tenendo presente questo e quanto si è accennato poco sopra si può concludere che *il trasporto dei vettori secondo la prof.ª Nalli appare in effetto* (cfr. loc. cit. (1), p. 568) *come il più semplice trasporto rigido intrinsecamente definito da una* V_n^m *sulla quale sia assegnata (a meno di una rotazione a coefficienti costanti) una* m—*upla di congruenze ortogonali*; invece *il più semplice trasporto rigido definito intrinsecamente dalla* V_n^m *stessa appare essere quello che si ottiene facendo variare i componenti tangenziali al modo di Synge e i componenti normali al modo della prof.ª Nalli.* Mostrerò più innanzi (n.° 5) che anche la rappresentazione analitica del trasporto ora detto risulta di notevole semplicità, e contiene come caso particolare quella del trasporto dei vettori di una V_n definito da una V_m (lungo le linee di V_m). Penso che si tratti di un complemento non inutile alla teoria delle varietà anolonome (8).

2. Vengo ora a un rapido sviluppo delle considerazioni sopra esposte. Il vettore derivato di un vettore ξ relativamente all'm-upla

(6) Ved. ad es. loc. cit. (3), pp. 11 e 13-14.

(7) *Geodesics in non-holonomic geometry.* (« Mathem. Annalen », B. 99, 1928, pp. 738-751) p. 746.

(8) Per gli ulteriori sviluppi di questa teoria rimando ai lavori di G. VRANCEANU (ved. per es.: *Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonoma e applicazioni*, « Rendiconti Accad. Lincei », ser. 6ª, vol. VIII, 1928, pp. 669-673) di Z. HORAK (*Sur une généralisation de la notion de variété*, « Public. de la Faculté des Sciences de l'Univ. Masaryk », Brno, 86, 1927) e J. A. SCHOUTEN (*On non-holonomic connexions*, « Proceedings Kon. Akad. », Amsterdam, vol. XXXI, 1928, pp. 291-299. e *Ueber nicht-holonome Uebertragungen in einer* L_n, « Mathem. Zeitschrift », B. 30, 1929, pp. 149-172).

di vettori unitari e ortogonali $\overset{a}{X}$ $(a, b, c, d, e = 1, 2,..., m)$ lungo una curva γ di cui ds è l'elemento d'arco, secondo la prof.ª NALLI, può (cambiate alquanto le notazioni) così esprimersi:

$$(1) \qquad \frac{\bar{d}_N \xi}{ds} = \frac{\bar{d}\xi}{ds} - \xi \times \overset{b}{X} \cdot \frac{\bar{d}\overset{a}{X}}{ds} \times \overset{b}{X} \cdot \overset{a}{X} + \xi \times \frac{\bar{d}\overset{a}{X}}{ds} \cdot \overset{a}{X} - \xi \times \overset{a}{X} \cdot \frac{\bar{d}\overset{a}{X}}{ds},$$

ove $\frac{\bar{d}}{ds}$ è il simbolo della derivazione assoluta lungo γ nel calcolo di RICCI in V_n. (Cfr. loc. cit. (1), p. 567). Se completiamo l'm-upla $\overset{a}{X}$ in una n-pla, introducendo altri $p = n - m$ campi di vettori $\overset{r}{X}$ $(p, q, r, s, t = m + 1,..., n)$ unitari e ortogonali fra loro e ai rimanenti lungo γ, possiamo scrivere le (1) così:

$$(2) \qquad \frac{\bar{d}_N \xi}{ds} = \frac{\bar{d}\xi}{ds} - \xi \times \overset{a}{X} \cdot \frac{\bar{d}\overset{a}{X}}{ds} \times \overset{r}{X} \cdot \overset{r}{X} + \xi \times \frac{\bar{d}\overset{a}{X}}{ds} \cdot \overset{a}{X}.$$

Ora: $\xi' = \xi \times \overset{a}{X} \cdot \overset{a}{X}$ e $\xi'' = \xi \times \overset{r}{X} \cdot \overset{r}{X}$ sono i componenti di ξ secondo la m-direzione dell'm-upla $\overset{a}{X}$, e normale a questa, e il primo di essi ha rispetto all'm-pla $\overset{a}{X}$ le componenti cartesiane $\xi \times \overset{a}{X} = \xi_a$: ebbene, le (1) dànno agevolmente, per $\frac{\bar{d}_N \xi}{ds} = 0$, $\frac{\bar{d}\xi'}{ds} = \frac{d\overset{a}{X}}{ds} \xi_a$, cioè $\frac{d\xi_a}{ds} = 0$, e $\frac{\bar{d}\xi''}{ds} \times \overset{r}{X} = 0$ (e viceversa); il che prova appunto (n.° 1) che ξ' varia lungo γ mantenendo costanti le sue componenti rispetto all'm-upla $\overset{a}{X}$, e ξ'' varia in modo che il suo derivato $\frac{\bar{d}\xi''}{ds}$ in V_n si mantiene nella m-direzione dell'm-upla (9).

3. Se l'm-upla $\overset{a}{X}$, che completiamo con la p-upla $\overset{r}{X}$, è assegnata *in tutta la* V_n anzichè soltanto lungo la curva γ, le m-direzioni dell'm-upla definiscono nella V_n *una* V_n^m *anolonoma* cui sono tangenti. Introdotte in V_n le coordinate curvilinee $u^\lambda (\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega =$

(9) Cioè, ad es., per trasporto infinitesimale ξ'' conserva inalterato l'angolo d'inclinazione su ciascuna direzione normale all'm-upla $\overset{a}{X}$ nel punto iniziale, che venga trasportata per parallelismo di LEVI-CIVITA in V_n.

1, 2,..., n), la V_n^m è rappresentata in V_n dal sistema pfaffiano $\overset{r}{X}_\lambda du^\lambda = 0$, in generale non integrabile. Posto

$$B^\lambda_{.\mu} = \overset{a}{X}{}^\lambda \overset{a}{X}_\mu, \quad C^\lambda_{.\mu} = \overset{r}{X}{}^\lambda \overset{r}{X}_\mu, \tag{3}$$

si ha manifestamente

$$B^\lambda_{.\mu} + C^\lambda_{.\mu} = \delta^\lambda_\mu; \tag{4}$$

sia $B^\lambda_{.\mu}$ che $C^\lambda_{.\mu}$ sono *tensori* per le trasformazioni di coordinate curvilinee in V_n e *invarianti* per trasformazioni ortogonali eseguite separatamente e arbitrariamente sugli m campi $\overset{a}{X}$ e sui p campi $\overset{r}{X}$. I tensori $B_{\lambda\mu} = a_{\lambda\nu} B^\nu_{.\mu}$ e $C_{\lambda\mu} = a_{\lambda\nu} C^\nu_{.\mu}$ ($a_{\lambda\nu}$ = tens. fondam. in V_n) sono *simmetrici* rispetto a λ, ν. Se ξ è un qualunque vettore di V_n, le $B^\lambda_{.\mu}\xi^\mu$, $C^\lambda_{.\mu}\xi^\mu$ sono le componenti delle sue proiezioni ξ' e ξ'', tangenziale a V_n^m e normale a questa. Ciò premesso: se $\frac{\bar{d}}{ds} = \frac{du^\lambda}{ds}\nabla_\lambda$ (cioè, ∇_λ è il simbolo di derivazione covariante di Ricci), possiamo porre analogamente $\frac{\bar{d}_N}{ds} = \frac{du^\lambda}{ds}\overset{N}{\nabla}_\lambda$, e ricavare dalla (1) o (2):

$$\overset{N}{\nabla}_\mu \xi^\nu = \nabla_\mu \xi^\nu + {}_N T_{\lambda\mu}^{..\nu} \xi^\lambda, \tag{5}$$

ove

$${}_N T_{\lambda\mu}^{..\nu} = B^\tau_{.\lambda} \nabla_\mu C^\nu_{.\tau} + \nabla_\mu \overset{a}{X}_\lambda \cdot \overset{a}{X}{}^\nu. \tag{6}$$

Si vede dunque che la $\overset{N}{\nabla}_\mu$ è *una derivazione lineare*, il che ci dà senz'altro, *a priori*, l'estensione a tensori qualunque e le varie proprietà notate dalla prof.ª Nalli (loc. cit. ([2])). E si ha ${}_N T_{\lambda\mu\nu} + {}_N T_{\nu\mu\lambda} = 0$, cioè, *la corrispondente connessione è euclidea*, il che equivale poi a dire che *il trasporto* $\overline{(1)}$, *definito dall'annullarsi del vettore* (1), *è rigido* (loc. cit. ([1])); cosa del resto che ovviamente consegue dalla caratterizzazione geometrica sopra esposta. Se $m \neq n-1$ nei secondi membri della (6) svanisce il primo termine, e si ritrovano delle formule da me indicate ([10]) pel parallelismo di Vitali.

Notiamo ancora le seguenti forme che si possono dare alle equazioni del trasporto $\overline{(1)}$ lungo una curva, applicato a vettori tangenziali, ξ', o normali, ξ'', alla V_n^m:

$$\frac{\bar{d}\xi'^\lambda}{ds} = \frac{\bar{d}\overset{a}{X}{}^\lambda}{ds}\overset{a}{X}_\mu \cdot \xi'^\mu, \quad \frac{\bar{d}\xi''^\lambda}{ds} = -\frac{\bar{d}B^\lambda_{.\mu}}{ds}\xi''^\mu. \tag{7}$$

([10]) *Parallelismi assoluti nelle* V_n *riemanniane*, (« Atti Istit. Veneto », t. LXXXVI, 1926-27, pp. 455-465), p. 457, form. (7).

Si vede bene di qui come il trasporto dei vettori normali abbia significato invariante per trasformazione ortogonale *qualunque* sull'm-upla $\overset{a}{X}$, mentre il trasporto dei vettori tangenziali alla V_n^m hà significato invariante soltanto per le trasformazioni ortogonali *a coefficienti costanti* sull'm-upla medesima: cioè, è legato, oltre che alla V_n^m, anche alla *stella di congruenze* definita dall'm-upla (cfr. 2° lav. cit. [4]).

4. Veniamo al trasporto dei vettori definito dal SYNGE. Le equazioni di questa « parallel propagation » lungo una curva possono porsi nella forma seguente:

$$\frac{\bar{d}_S\xi^\nu}{ds} = \frac{\bar{d}\xi^\nu}{ds} + {}_ST_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\xi^\lambda\frac{du^\mu}{ds} = 0, \tag{8}$$

ove è

$$ {}_ST_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \nabla_\mu C^\nu_{\cdot\lambda}. \tag{9}$$

La forma analitica è molto semplice. Ma si vede subito che *questo trasporto non è rigido* (${}_ST_{\lambda\mu\nu}$ è *simmetrico,* anzichè *emisimmetrico,* rispetto a λ, ν). Pure *nei riguardi dei vettori tangenziali alla* V_n^m (e di essi soltanto) esso si comporta come un trasporto rigido. Infatti: anzitutto tale trasporto, applicato a un vettore tangenziale, dà sempre un vettore tangenziale (mentre applicato a un vettore normale non dà in generale un vettore normale a V_n^m). Poi: se ξ, η variano lungo una curva γ di V_n^m secondo la legge definita dalle equazioni (8) si ha lungo γ:

$$\frac{d}{ds}(\xi \times \eta) = -2\frac{d}{ds}C_{\lambda\mu}\cdot\xi^\lambda\eta^\mu, \tag{10}$$

e si vede bene che il secondo membro è nullo se ξ, η sono *tangenziali* e non lo è generalmente se uno almeno dei due vettori non è tangenziale alla V_n^m.

Pel caso di un vettore tangenziale, ξ, dette ancora $\xi_a = \xi \times \overset{a}{X}$ le sue componenti cartesiane rispetto all'm-upla $\overset{a}{X}$ e analogamente dette $t_a = \frac{du^\lambda}{ds}\overset{a}{X}_\lambda$, $t_r = \frac{du^\lambda}{ds}\overset{r}{X}_\lambda$ le componenti cartesiane di $t = dP$ rispetto al sistema $(\overset{a}{X}, \overset{r}{X})$, e infine introdotti in V_n i *coefficienti di rotazione* rispetto all'n-upla $(\overset{a}{X}, \overset{r}{X})$, le equazioni del trasporto secondo SYNGE si scrivono:

$$\frac{d\xi_a}{ds} = (\gamma_{abc} t_c + \gamma_{abr} t_r)\xi_b. \tag{11}$$

In particolare per $t_r = 0$ si ritrova il « parallelismo in V_n^m », definito appunto attraverso a questa rappresentazione cartesiana dal VRANCEANU (loc. cit. (5), p. 21). Come ho già accennato (n.° 1) il VRANCEANU non considera che il trasporto tangenziale di vettori tangenziali (11). Egli definisce però delle derivate dei vettori tangenziali in direzione normale e dei vettori normali in direzione tangenziale che darebbero luogo a trasporti *non rigidi*: su questo non mi fermerò.

5. Ma fra i trasporti rigidi dei vettori (qualunque) di V_n che possono definirsi in relazione con una V_n^m immersa nella V_n ve ne è uno intrinsecamente determinato dalla V_n^m stessa, (come accennavo al n.° 1), e in modo tale da costituire la più semplice e diretta generalizzazione del parallelismo di LEVI-CIVITA. Esso è il trasporto *pel quale è nullo il componente tangenziale del derivato in* V_n *del componente tangenziale*, e così pure *il componente normale del derivato in* V_n *del componente normale del vettore trasportato:*

$$B^{\lambda}_{.\mu} \frac{\bar{d}}{ds}(B^{\mu}_{.\nu}\xi^{\nu}) = 0, \quad C^{\lambda}_{.\mu} \frac{\bar{d}}{ds}(C^{\mu}_{.\nu}\xi^{\nu}) = 0. \tag{12}$$

ossia, posto al solito $\xi'^{\lambda} = B^{\lambda}_{.\mu}\xi^{\mu}$, $\xi''^{\lambda} = C^{\lambda}_{.\mu}\xi^{\mu}$,

$$\frac{\bar{d}\xi'^{\lambda}}{ds} = \frac{\bar{d}}{ds} B^{\lambda}_{.\mu}\cdot\xi'^{\mu}, \quad \frac{\bar{d}\xi''^{\lambda}}{ds} = \frac{\bar{d}}{ds} C^{\lambda}_{.\mu}\cdot\xi''^{\mu}. \tag{13}$$

Ne segue immediatamente questa semplice rappresentazione analitica:

$$\frac{\bar{d}_L\xi^{\lambda}}{ds} = \frac{\bar{d}\xi^{\lambda}}{ds} - \left(\frac{\bar{d}}{ds} B^{\lambda}_{.\mu}\cdot B^{\mu}_{.\nu} - \frac{\bar{d}}{ds} B^{\mu}_{.\nu}\cdot B^{\lambda}_{.\mu}\right)\xi^{\nu} = 0, \tag{14}$$

cioè

$$\frac{\bar{d}\xi^{\lambda}}{ds} + {}_LT_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\lambda}\xi^{\nu}\frac{du^{\tau}}{ds} = 0, \quad \text{con} \quad {}_LT_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = \nabla_{\tau}B^{\mu}_{.\nu}\cdot B^{\lambda}_{.\mu} - \nabla_{\tau}B^{\lambda}_{.\mu}\cdot B^{\mu}_{.\lambda}. \tag{15}$$

Dunque: per questo trasporto ξ' varia al modo di SYNGE-VRANCEANU, e ξ'' al modo della prof.ª NALLI. Che si tratti d'un

(11) Nell'Introduzione il VRANCEANU dà notizia, senza specificare, di un « parallelismo esteriore » che egli studierà in una seconda parte del lavoro (p. 11).

trasporto rigido è manifesto *a priori*, ma del resto si vede bene che ${}_LT_{\nu\tau\lambda}$ risulta emisimmetrico rispetto a ν, λ. E le equazioni (15) comprendono come caso particolare quelle del « trasporto parallelo relativo a V_m dei vettori di V_n applicati a punti di V_m » (loc. cit. ([8]) p. 14): questo si vede agevolmente, tenendo presente che è (con le notazioni del lav. cit.) $B^{rs} = b^{\lambda\mu}\theta^r_\lambda\theta^s_\mu$ $\left(r, s = 1, 2, \dots, n;\ \lambda, \mu = 1, 2, \dots, m;\ \theta^r_\lambda = \dfrac{\partial x^r}{\partial u^\lambda};\ b^{\lambda\mu}\ \text{tensore fondamentale di}\ V_m\right)$. Indicherò ancora una *costruzione* del trasporto rigido in parola, « trasporto relativo a V_n^m », da un punto P a P^* infinitamente vicino, valida naturalmente anche pel caso particolare delle V_m (olonome) in V_n: *il vettore* ξ^* *omologo* (o se vogliamo, equipollente) *in* P^* *a un vettore* ξ *di* V_n^m *in* P *pel trasporto relativo a* V_n^m *si ottiene componendo i vettori ottenuti con proiezioni ortogonali* (fatte dopo trasporto, secondo LEVI-CIVITA, lungo PP^* in V_n) *dei componenti* ξ' *e* ξ'' (tangenziale e normale a V_n^m in P) *di* ξ *sullo spazio tangente e sullo spazio normale a* V_n^m *in* P^*.