
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Corrispondenza

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 10 (1931), n.1, p. 44–46.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_44_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_44_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

42. La lunghezza di un'ellisse, potendosi riguardare come la somma di una serie ordinata secondo le potenze ascendenti del quadrato della sua eccentricità (e quindi contenente razionalmente i semiassi a e b), sarà espressa approssimativamente dalla somma dei primi n termini della serie stessa; mentre un limite superiore del corrispondente resto ci fornirà il grado di approssimazione.

Ricordando dunque che, se L indica la lunghezza dell'ellisse, sussiste la formula:

$$L = 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sigma^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sigma^3 - \dots \right\}.$$

dove

$$\sigma = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

ne seguirà:

$$L = 2\pi a S_n - 2\pi a R_n,$$

essendo S_n la somma dei primi n termini della serie entro parentesi, e R_n il relativo resto cambiato di segno.

Osservasi ora che si ha:

$$R_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \sigma^n \alpha_n,$$

dove α_n indica la somma della serie

$$\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 \sigma + \frac{1}{2n+3} \left[\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} \right]^2 \sigma^2 + \dots$$

Perciò potremo scrivere:

$$\alpha_n < \frac{1}{2n-1} (1 + \sigma + \sigma^2 + \dots) = \frac{1}{(2n-1)(1-\sigma)},$$

ossia:

$$\alpha_n < \frac{a^2}{(2n-1)b^2}.$$

Avremo di conseguenza:

$$L = 2\pi a S_n - \epsilon_n,$$

essendo:

$$\epsilon_n < \frac{2\pi a^3}{b^2} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right] \frac{\sigma^n}{2n-1}.$$

Dopo ciò possiamo concludere che, assumendo come lunghezza dell'ellisse il valore dell'espressione:

$$2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sigma^2 - \dots - \frac{1}{2n-3} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \right] \sigma^{n-1} \right\},$$

si commette un errore *per eccesso* che è minore del secondo membro della precedente disuguaglianza; il quale secondo membro va sempre più diminuendo col crescere di n , e tende a zero col tendere di n all'infinito.

Così, facendo $n=2$, si ha:

$$L = \frac{\pi}{2} \frac{3a^2 + b^2}{a} - \epsilon_2, \quad \text{con} \quad \epsilon_2 < \frac{3\pi}{32} \frac{(a^2 - b^2)^2}{ab^2}.$$

Prendendo $n=3$, potremo scrivere:

$$L = \frac{\pi}{32} \frac{(5a^2 + 3b^2)(9a^2 - b^2)}{a^3} - \epsilon_3,$$

essendo:

$$\epsilon_3 < \frac{5\pi}{128} \frac{(a^2 - b^2)^3}{a^4 b^2}.$$

Le varie espressioni approssimate di L che si ottengono col procedimento indicato presentano il vantaggio di contenere razionalmente i semiassi a e b . Altre se ne conoscono contenenti irrazionalmente queste due quantità, che talvolta forniscono valori più approssimati di L . Una è la seguente:

$$L = \frac{2\pi}{9} \left\{ \frac{19}{2} (a+b) - 4 \frac{a^2 + 8ab + b^2}{\sqrt{a^2 + 14ab + b^2}} \right\} + \epsilon,$$

essendo:

$$\epsilon < \frac{5\pi}{16384} \frac{(a-b)^6}{b^5}.$$

Tale formula è dovuta al prof. PEANO, e se ne trova la dimostrazione nell'annata 1889 (2° semestre, pag. 960), dei « Comptes rendus ».

Altra espressione approssimata di L , pure dovuta a PEANO, e ritrovata poi dal BOUSSINESQ nei « Comptes rendus » del 1889, è :

$$\frac{\pi}{2} [3(a + b) - 2\sqrt{ab}].$$

MINEO CHINI

Analoga risposta alla medesima questione è giunta da parte del Colonnello O. RESTA.

DOMANDE

43. Si desidererebbe una bibliografia, il più possibilmente completa ed aggiornata, sul famoso problema dei quattro colori.

a. m.
