Enea Bortolotti

Connessioni proiettive

* II. La teoria delle connessioni proiettive, secondo Cartan e Schouten

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.1, p. 28–34.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_28_0>

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Connessioni proiettive (*).

II. La teoria delle connessioni proiettive, secondo Cartan e Schouten.

5. I cultori della « geometria proiettiva dei cammini », come abbiamo visto, prendono quale punto di partenza, per fare in una varietà curva una sorta di geometria proiettiva, la connessione affine. È in sostanza la stessa cosa che facciamo nello sviluppo elementare, scolastico, della geometria proiettiva del piano o dello spazio: presupponiamo data la nozione (di carattere affine, negli spazi euclidei) di *parallelismo*, che contiene come caso particolare quella, proiettiva, di linea retta (autoparallela), e ce ne serviamo per introdurre gli elementi impropri: coi quali ampliamo il piano, o lo spazio, affine, formandone il piano (o lo spazio) proiettivo. Ma nello stesso modo che si può fare nel piano o nello spazio una geometria proiettiva *autonoma*, che prescinda da ogni nozione di geometria affine o metrica (in particolare, anche dal postulato delle parallele), così era desiderabile il costruire anche per una varietà curva una teoria autonoma delle proprietà proiettive. Questa costruzione è stata iniziata fino dal 1924 da É. Cartan (7) e sviluppata poi, come vedremo, seguendo punti di vista alquanto diversi, specialmente da O. Veblen e da J. A. Schouten.

Al Cartan è dovuta la nozione fondamentale di *varietà a connessione proiettiva*, che si presenta come una assai naturale generalizzazione di quella di *varietà a connessione affine:* vista però da un punto di vista un po' diverso da quello prima da noi adottato (n.° 2). È noto che una X_n (continuo n-dimensionale) si può sempre riguardare, nell'intorno del 1° ordine di ogni suo punto, come uno spazio affine: questo non è che l'enunciato geometrico del fatto analitico che una qualunque trasformazione delle coordi-

(*) V. la parte prima nel T. IX, fasc. 5, pag. 288.

nate curvilinee u^r induce una trasformazione lineare sui differenziali du^r: o, se si vuole, che ogni trasformazione puntuale, nell'intorno del 1° ordine di una coppia di punti omologhi, può approssimarsi con una affinità. Possiamo dunque riguardare i vettori infinitesimi *e quindi anche i vettori finiti* della varietà in un punto P come appartenenti a uno spazio affine, *lo spazio affine tangente in* P alla varietà: sul quale ad es. le componenti ξ^r di un vettore controvariante ξ sono le coordinate cartesiane del punto $Q = P + \xi$, nel sistema che ha P come origine e i vettori controvarianti di componenti $(10 \ldots 0)$ $(01 \ldots 0) \ldots (00 \ldots 1)$ come vettori fondamentali degli n assi. Ciò premesso: dare alla X_n una connessione affine equivale a *raccordare, con una rappresentazione affine, gli spazi affini tangenti in due punti infinitamente vicini.* Questa è la veduta del CARTAN, che la generalizza chiamando *varietà a connessione proiettiva una varietà per la quale è assegnata una legge di rappresentazione proiettiva tra gli spazi affini tangenti in punti infinitamente vicini* [13].

Riferito lo spazio tangente nel punto P della varietà a coordinate proiettive omogenee x^α ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = 0, 1, \ldots, n$, ora e nel seguito), intendendo che il punto P stesso sia uno dei vertici della piramide fondamentale, ad es. $(10 \ldots 0)$ [14], la connessione proiettiva

[13] Veramente il CARTAN non si esprime così: egli dice (7, pp. 207-208) *varietà a connessione proiettiva* una varietà che nell'intorno infinitesimo di ciascun suo punto presenta tutti i caratteri di uno spazio proiettivo, e inoltre è dotata di una legge che permette di raccordare in un solo spazio proiettivo gli intorni infinitesimi di due suoi punti infinitamente vicini. Per dare un senso preciso a tale definizione egli immagina poi che a ciascun punto della varietà venga associato uno spazio proiettivo di cui quel punto fa parte; e intende che la connessione proiettiva sia definita da una legge di rappresentazione proiettiva fra gli spazi così associati a due punti infinitamente vicini della varietà. Però, come osserva il WEYL (**48**, p. 719), se non si suppone intrinsecamente fissata la legge secondo cui a ciascun punto della varietà viene associato uno spazio proiettivo, non si può dire di fare una geometria *relativa soltanto alla supposta varietà.* Ma è naturale supporre che lo spazio proiettivo associato al punto generico della varietà sia il relativo *spazio affine tangente*, che in quanto è uno spazio affine, è anche uno spazio proiettivo. Questa ipotesi non è che apparentemente restrittiva, perchè ad essa si è necessariamente condotti quando si voglia scendere ad applicazioni concrete della teoria. Ved. spec. VEBLEN, **41**, p. 153.

[14] Le coordinate proiettive x^α del punto $Q = P + \xi$ saranno legate alle coordinate cartesiane ξ^r da formule del tipo $\xi^r = \dfrac{c^r_{.s} x^s}{x^0 + c^0_{.s} x^s}$, le $c^\alpha_{.s}$ es-

potrà rappresentarsi con formole del tipo seguente:

$$dx^\alpha + \omega_\beta^\alpha x^\beta = 0, \quad \text{cioè} \quad dx^\alpha + \Lambda_{\beta r}^\alpha x^\beta du^r = 0, \tag{7}$$

ove le $\omega_\beta^\alpha = \Lambda_{\beta r}^\alpha du^r$ sono n^2 *pfaffiani*, i cui coefficienti $\Lambda_{\beta r}^\alpha$ (funzioni assegnate delle u^r) si diranno i *parametri* della connessione proiettiva, relativi ai supposti riferimenti sulla varietà e sugli spazi affini tangenti ([15]). Noti questi riferimenti le $\Lambda_{\beta r}^\alpha$ individuano la connessione, ma inversamente, non ne vengono individuate, e neppure le ω_β^α lo sono, perchè la stessa connessione è rappresentata ad es. eguagliando i primi membri delle (7), anzichè allo 0, ad equimultipli arbitrari delle x^α. Invece risultano individuate dalla connessione, e sono d'altra parte sufficienti ad individuarla, le forme $\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_0^0$, cioè le quantità

$$L_{\beta r}^\alpha = \Lambda_{\beta r}^\alpha - \delta_\beta^\alpha \Lambda_{0r}^0 \tag{8}$$

(CARTAN, **7**, p. 211). Ciò sempre fino a che i sistemi di riferimento siano dati. Il CARTAN non prende in considerazione il caso di un mutamento generale dei riferimenti (al quale accenneremo più innanzi: n.° 7). Egli si limita a questa osservazione, che però ha notevole importanza: che esiste un modo ben determinato di associare a un riferimento curvilineo sulla varietà dei riferimenti proiettivi sugli spazi tangenti, tali da rendere

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \omega_0^r = du^r \quad \text{cioè} \quad \Lambda_{0r}^s = \delta_r^s, \quad \text{o} \quad L_{0r}^s = \delta_r^s \\ &\text{b)} \quad \omega_s^s = n\omega_0^0 \quad \text{cioè} \quad \Lambda_{sr}^s = n\Lambda_{0r}^0, \quad \text{o} \quad L_{sr}^s = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Ciò ha un significato geometrico abbastanza semplice, indicato recentemente dal WEYL ([16]).

sendo funzioni arbitrarie delle u^r. Cfr. VEBLEN, **41**, p. 153. La conoscenza di queste funzioni $c^\alpha_{\cdot s}$ è indispensabile quando si voglia passare ad applicazioni concrete dei risultati generali, ma nella ricerca di questi spesso è utile lasciare alle $c^\alpha_{\cdot s}$, cioè ai riferimenti proiettivi negli spazi tangenti, la massima arbitrarietà. Vi è però, come accenniamo più innanzi, un modo di determinare intrinsecamente le $c^\alpha_{\cdot s}$, cioè di legare ad un sistema di coordinate curvilinee dei corrispondenti riferimenti proiettivi.

([15]) Il CARTAN non usa i parametri $\Lambda_{\beta r}^\alpha$, introdotti da SCHOUTEN, ma soltanto le forme pfaffiane ω_β^α. Del suo simbolismo e dei suoi procedimenti di calcolo, eleganti ma, almeno per noi, un po' insueti, non ci varremo nel seguito.

([16]) Ved. **43**, pp. 718 e 720-721 e cfr. **42**, **37**. Sulle interessanti vedute del WEYL a questo proposito avremo occasione di fermarci più innanzi (n.° 9).

6. Le (7), integrate lungo una linea γ della varietà, dànno luogo a un trasporto proiettivo dei punti degli spazi tangenti, che per brevità diremo *traslazione proiettiva* lungo γ. Il trasporto ciclico per traslazione proiettiva lungo un ciclo infinitesimo dà luogo a una trasformazione proiettiva (infinitesima) dello spazio affine tangente in punto P iniziale del ciclo su sè stesso, generalmente non identica: il che accade per un ciclo generico allora e soltanto allora che la varietà è essa stessa uno spazio proiettivo. In generale la proiettività detta sopra esprime la *curvatura* della varietà. Precisamente, il divario fra i valori iniziali e finali delle coordinate x^α di un punto dello spazio tangente in P pel trasporto lungo il quadrilatero infinitesimo di vertici u^r, $u^r + d_1u^r$, $u^r + d_1u^r + \frac{1}{2} d_1d_2u^r$, $u^r + d_2u^r$ è espresso da formole del tipo

$$\Delta x^\alpha = -\Omega^\alpha_\beta x^\beta = \Lambda_{pq\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} x^\beta d_1u^p d_2u^q \quad (10)$$ [17].

La condizione perchè il trasporto per traslazione proiettiva sia integrabile, e quindi la varietà *si riduca ad uno spazio proiettivo*, è espressa dall'annullarsi non delle Ω^α_β (il che sarebbe condizione *sufficiente*, ma non *necessaria* in generale), ma delle forme $\Omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta\Omega^o_o$, cioè, delle quantità $\Lambda_{pq\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - \delta^\alpha_\beta\Lambda_{pqo}^{\cdot\cdot\cdot o} = A_{pq\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$. In particolare l'annullarsi delle $A_{pqo}^{\cdot\cdot\cdot r} = \Lambda_{pqo}^{\cdot\cdot\cdot r}$ esprime che nella trasformazione proiettiva, definita dalle (10), dello spazio tangente su sè stesso, *il punto* P *è unito*. Si dice allora, secondo CARTAN, che la connessione proiettiva *è senza torsione*.

Mediante la *traslazione proiettiva* lungo una linea γ possiamo raccordare, o sviluppare, in un solo spazio proiettivo gli spazi tangenti alla varietà nei punti di γ. La linea γ stessa in questo modo potrà venire sviluppata in una linea γ_0 dello spazio affine tangente in un punto iniziale P_0 di γ. Diciamo, col CARTAN (**7**, p. 219) *geodetica* della connessione proiettiva una linea che, sullo spazio tangente alla varietà in un qualunque suo punto, *si sviluppi in una linea retta.* Le geodetiche sono rappresentate da equazioni del tipo

$$d^2u^r + \Lambda^r_{st}du^s du^t = \omega du^r. \quad (11)$$

[17] È $\Omega^\alpha_\beta = (\omega^\alpha_\beta)' - \sum_0^n{}_\gamma[\omega^\gamma_\beta\omega^\alpha_\gamma]$ (CARTAN, **7**, pag. 215, form. (6)) ossia $\Lambda_{pq\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^q}\Lambda^\alpha_{\beta p} - \frac{\partial}{\partial u^p}\Lambda^\alpha_{\beta q} + \Lambda^\alpha_{\gamma q}\Lambda^\gamma_{\beta p} - \Lambda^\alpha_{\gamma p}\Lambda^\gamma_{\beta q}$ (SCHOUTEN, **10**, p. 421; **26**, p. 155). Le $\Omega^\alpha_\beta = \Lambda_{pq\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} d_1u^p d_2u^q$ sono « forme quadratiche esterne » secondo il CARTAN.

(ove ω è funzione arbitraria delle u^r), e quindi *non differiscono dalle geodetiche di una connessione affine che abbia come parametri le* Λ_{st}^r: in particolare, esse non dipendono affatto dai parametri Λ_{0s}^0 e Λ_{rs}^0. Assegnate le geodetiche (11), cioè in sostanza data una « projective geometry of paths », la corrispondente connessione proiettiva *non è determinata*: però, come ha osservato il CARTAN (7, p. 225) fra le infinite connessioni proiettive aventi le stesse geodetiche ve ne è una intrinsecamente determinata da queste, quella che egli chiama *connessione proiettiva normale* ([18]).

7. I precedenti risultati sono dovuti al CARTAN: ma nell'esporli ho adottato in parte le notazioni e i procedimenti introdotti da SCHOUTEN, il quale indipendentemente dal CARTAN e quasi contemporaneamente ha esposto una teoria degli « spostamenti proiettivi » (**10**, 1924); da lui poi sviluppata più ampiamente in una pubblicazione del 1926 (**26**) e perfezionata in un recentissimo lavoro (**46**, 1930). Nella sua trattazione lo SCHOUTEN, riprendendo e utilizzando certe vedute sulle « varietà lineari generali » espresse fino dal 1919 da R. KÖNIG (**1**; cfr. **11**), ma che non avevano attratto fino ad allora l'attenzione dei geometri, riconduce lo studio delle connessioni *proiettive* (e *conformi*) alla sua teoria dei *trasport lineari* (**9**, Cap. II), opportunamente generalizzata. Rispetto a quello del CARTAN tale trattazione di SCHOUTEN — che del resto non ne differisce in modo proprio sostanziale — presenta il vantaggio di una formulazione analitica avente carattere invariantivo per le trasformazioni dei riferimenti.

L'osservazione fondamentale, che permette di trasportare anche all'attuale teoria, opportunamente esteso, il calcolo di RICCI, è che con le $\Lambda_{\beta r}^{\alpha}$ (n.° 5) si possono, come coi parametri Γ_{st}^r di una connessione affine, formare delle *derivate covarianti* dei sistemi multipli che si comportino come tensori per le trasformazioni delle coordinate proiettive x^α sugli spazi tangenti (trasformazioni lineari a coefficienti, in generale, funzioni del punto variabile sulla varietà). Ciò però sotto la condizione che, quando le x^α e le u^r vengano comunque trasformate, le $\Lambda_{\beta r}^{\alpha}$ varino secondo la legge

$$(12) \qquad \Lambda'^{\gamma}_{\beta s} q^{\alpha}_{\cdot\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma r} q^{\gamma}_{\cdot\beta}\, \theta^{r}_{\cdot s} + \frac{\partial q^{\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial u'^s}, \quad \left(\theta^{r}_{\cdot s} = \frac{\partial u^r}{\partial u'^s};\ x^\alpha = q^{\alpha}_{\cdot\beta} x'^\beta\right).$$

([18]) Essa è caratterizzata da certe condizioni, le quali nell'ipotesi che le (9) siano soddisfatte, si scrivono:

$$L_{pq}^{\alpha} = L_{qp}^{\alpha} \quad \text{ed} \quad L_{pq}^{0} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial L_{pq}^t}{\partial u^t} - L_{sp}^t L_{tq}^s\right).$$

Le stesse (12) si trovano se si esprime che le equazioni (7) del trasporto per « traslazione proiettiva » hanno carattere invariante per trasformazioni dei riferimenti, cioè delle u^r e x^α. *Da un punto di vista analitico, la teoria delle connessioni proiettive è lo studio delle funzioni delle* $\Lambda^\alpha_{\beta r}$ *che hanno carattere d'invarianza per le trasformazioni* (12).

È agevole verificare che le ipotesi (9, a) e (9, b) di CARTAN hanno carattere invariantivo soltanto per le trasformazioni dei riferimenti per le quali è (**50**, **51** e cfr. **46**)

$$q^{\cdot r}_{\cdot s} = q^{\cdot o}_{\cdot o}\,\theta^{\cdot r}_{\cdot s}, \quad q^{\cdot r}_{\cdot o} = 0, \quad q^{\cdot o}_{\cdot r} = q^{\cdot o}_{\cdot o}\,\frac{\partial\theta}{\partial u^r}, \tag{13}$$

ove

$$\theta = -\frac{1}{n+1}\log\Delta, \quad \text{e} \quad \Delta = \left|\frac{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)}{\partial(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n)}\right|.$$

Dunque: a parte la presenza del fattore $q^{\cdot o}_{\cdot o}$ (inessenziale, trattandosi di coordinate *omogenee*) i coefficienti della trasformazione lineare sulle x^α (come ora prevedibile) vengono *del tutto determinati* dalla trasformazione eseguita sulle coordinate curvilinee u^r. Come vedremo (n.° 8) a un risultato che non differisce sostanzialmente da questo è giunto VEBLEN guidato da assai diverse vedute.

Lo SCHOUTEN aggiunge (in sostanza) alle posizioni (9) di CARTAN anche la seguente:

$$\Lambda^{o}_{or} = 0 \quad \text{cioè} \quad \Lambda^\alpha_{\beta r} = L^\alpha_{\beta r}, \tag{14}$$

la quale, unita alle (9), ha carattere invariantivo soltanto per le trasformazioni dei riferimenti proiettivi per le quali, oltre alle (13), vale la seguente condizione, geometricamente non restrittiva, ed atta *a determinare anche* $q^{\cdot o}_{\cdot o}$ in dipendenza della supposta trasformazione sulle u^r:

$$q^{\cdot o}_{\cdot o} = \Delta^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{15}$$

(Ved. **46**, p. 199). Ciò equivale a supporre che la trasformazione sulle x^α sia *unimodulare* ([19]). Le quantità $q^{\cdot\alpha}_{\cdot\beta}$ definite dalle (13), (15) possono assumersi come coefficienti nelle formule di trasformazione di una classe di grandezze tensoriali con indici $\alpha\beta\gamma$.... variabili da 0 ad n: « tensori proiettivi », la cui definizione differisce assai meno di quanto non possa sembrare a prima vista da

([19]) Non è fuori luogo notare che CARTAN e SCHOUTEN, sostituendo in sostanza ai *punti* geometrici dei punti caricati, o « Punktdichten », considerano come algebricamente *distinti* due punti come x^α e ρx^α.

quella di T. Y. THOMAS (n.° 4). A tali tensori si può applicare la derivazione covariante di parametri $\Lambda^{\alpha}_{\beta r}$, però le derivate così ottenute, presentando un indice della serie $rst...$, variabile da 1 ad n soltanto, *non rientrano* nella classe di tensori detta sopra, e in particolare, ad esse *non può applicarsi* una seconda volta la stessa derivazione covariante.

Questo inconveniente della sua primitiva formulazione SCHOUTEN ha potuto eliminare nel più recente lavoro (46), giungendo a costruire delle derivate (covarianti) *proiettive*: a queste avrò occasione di accennare più innanzi (n.° 9).

Mi limito qui ad aggiungere che già nel 1924 lo SCHOUTEN osservava come, nel particolare caso delle connessioni proiettive normali, le componenti $\Lambda^{\cdot\cdot\cdot s}_{pqr}$ del « tensore di curvatura » si riducano a quello del *tensore di Weyl* (n.° 2) per una (qualunque) connessione affine avente le stesse geodetiche. Questo risultato, paragonato con quello (già sopra accennato: n.° 4) ottenuto da T. Y. THOMAS, ci fa prevedere che una semplice relazione debba pure legare gli enti introdotti dal THOMAS a quelli di CARTAN e SCHOUTEN. E infatti: è a priori evidente come lo studio delle *connessioni proiettive normali* non differisca da quello della « projective geometry of paths »: e del resto è agevole verificare che le $\Gamma^{*\alpha}_{\beta r}$ di T. Y. THOMAS (n.° 4) differiscono soltanto per fattori numerici inessenziali — i quali scomparirebbero mutando il parametro u^o in $-(n+1)u^o$: ved. n.° 8 — dalle $L^{\alpha}_{\beta r}$ (n.° 5) costruite per la connessione proiettiva normale che ha le stesse geodetiche della connessione affine da cui le $\Gamma^{*\alpha}_{\beta r}$ sono ricavate.

Così le due teorie, quella della Scuola di Princeton e quella iniziata dal CARTAN, vengono a raccordarsi, e anzi, la prima appare quale caso particolare della seconda. Vedremo come ulteriori ricerche, dovute a svariati autori e principalmente al VEBLEN, abbiano completato questa unificazione, ed insieme arricchito la teoria, che laboriosamente veniva formandosi, di nuove e interessanti vedute. *(continua)*

ENEA BORTOLOTTI