Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Tullio Viola

Sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.1, p. 20–24.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_20_0>

Sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale.

Nota di TULLIO VIOLA (a Bologna).

Sunto. - *Sono riportati gli enunciati di uno studio sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale: esempi; estensione di un teorema fondamentale di* DENJOY *sui numeri derivati; struttura dell'aggregato dei punti di discontinuità; classificazione secondo* BAIRE.

Il problema della ricerca delle funzioni primitive, di fondamentale importanza per il Calcolo Integrale, ha indotto analisti moderni, quali ad es. il DINI, il DU BOIS REYMOND ed in epoca recente il LEBESGUE e il DENJOY, allo studio dell'operazione di « limite del rapporto incrementale » per funzioni continue. Il DENJOY, nelle sue Memorie sistematicamente raccolte nel « Journal Mathématiques pures et appliquées » (1915), nel « Bulletin de la Société Mathématique de France » (2° e 3° fasc., 1915) e negli

« Annales de l'École normale supérieure » (1916 e 1917), ha studiato quest'argomento con una profondità senza precedenti, ricavandone gli elementi dei quali si è valso per la risoluzione completa del detto problema della ricerca della funzione primitiva nei casi in cui le funzioni derivate o i « numeri derivati », sono finiti.

Seguendo un consiglio del prof. B. LEVI, ho studiato nella mia tesi di laurea il problema analogo per le funzioni continue da una parte sola. Espongo qui brevemente i principali risultati ottenuti rimandando per le dimostrazioni e per maggiori sviluppi ad un lavoro più diffuso che sarà pubblicato negli « Annali di Matematica ».

1. Una funzione $F(x)$ è continua verso destra in un punto x se, assegnato comunque un numero $\varepsilon > 0$, esiste sempre un numero $\delta > 0$ tale che, se $0 < x - x_0 < \delta$, è $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Fra le funzioni continue verso destra in tutto un dato intervallo $\overline{ab}$ presentano un particolare interesse quelle costanti a tratti, con la condizione che in ogni punto di discontinuità il valore della funzione sia quello che essa assume nel tratto di destra. Se gl'intervalli in cui $F(x)$ si mantiene costante sono in numero finito, $F(x)$ è anche derivabile verso destra ed ha precisamente derivata nulla in ogni punto. In caso contrario possono esistere punti d'accumulazione verso destra in cui si perde la derivabilità. Per es. la funzione $F(x) = \frac{1}{2^n}$, per $\frac{1}{2^{n+1}} \leq x < \frac{1}{2^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, è definita in tutti i punti interni all'intervallo $\overline{01}$: se ne completa la definizione ponendo $F(0) = 0$. Si vede facilmente che nel punto $x = 0$ la derivata superiore destra (limite massimo del rapporto incrementale destro, quando l'incremento tende a 0) è $\overline{D}_+F(0) = 2$, mentre la derivata inferiore destra (limite minimo del rapporto incrementale destro, quando l'incremento tende a 0) è $\underline{D}_+F(0) = 1$.

2. Dall'esempio semplicissimo delle funzioni costanti a tratti si può passare facilmente, mediante evidenti operazioni algebriche o funzionali, ad altre funzioni di comportamento più complicato e che godono di analoghe proprietà di continuità e derivabilità da una parte sola. Così se $G(x)$ è una funzione costante a tratti nel senso che si è precisato e se $H(x)$ è una funzione continua (bilateralmente) la funzione $F(x) = G(x) + H(x)$ è continua verso destra: quanto alla derivabilità verso destra, $F(x)$ si comporta come $H(x)$, fatta eventualmente eccezione dei punti d'accumulazione verso destra come s'è osservato sopra. Applicando procedimenti di condensazione di singolarità si può evidentemente derivare da semplici esempi come quello dato alla fine del n.° 1, altri in cui i punti a comportamento singolare del tipo quì incontrato per $x=0$ siano infiniti e precisamente costituiscano un aggregato numerabile non denso in $\overline{ab}$.

Esistono anche funzioni $F(x)$ continue verso destra il cui aggregato di punti di discontinuità (discontinuità verso sinistra, s'intende) è denso. Nella mia tesi, anzi, io dò un procedimento assai semplice per costruire di tali funzioni, che siano inoltre crescenti e il cui aggregato di punti di discontinuità sia un aggregato numerabile $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ comunque assegnato nell'intervallo $\overline{ab}$ di definizione, denso in esso. Dimostro che *la numerabilità dell'aggregato* N *dei punti di discontinuità (sia* N *denso oppure non) è necessaria.*

3. Un teorema di Denjoy (« Journal de Mathématiques », 1915, pag. 148) da lui chiamato « primo teorema » o « teorema descrittivo », viene da me esteso nella forma seguente:

Teorema fondamentale. — Se esiste un'infinità d'intervalli $S_1, S_2, \dots S_n, \dots$, la cui lunghezza tende a 0 per n tendente ad ∞, i cui estremi sinistri formano un aggregato ovunque denso in $\overline{ab}$; se, d'altra parte, il rapporto incrementale della funzione $F(x)$ su S_n:

α) resta costantemente superiore a un numero fisso k,

β) oppure resta costantemente inferiore a un numero fisso k,

γ) oppure tende verso un limite unico finito od infinito l,

allora l'insieme E dei punti di $\overline{ab}$ in cui è rispettivamente:

α) $\overline{D}_+F(x) \geq k$,

β) oppure $\underline{D}_+F(x) \leq k$,

γ) il numero l un derivato mediano o estremo destro,

l'insieme E così definito è ovunque denso in $\overline{ab}$, ed anzi è un residuale di $\overline{ab}$.

Da questo teorema deduco molte proposizioni, di cui riporto quì alcuni enunciati più importanti:

a) Se una funzione ammette da una stessa parte una derivata unica in ogni punto di $\overline{ab}$, è impossibile che i due aggregati in cui questa derivata è l per il primo, l' per il secondo $(l \neq l')$ siano l'uno e l'altro densi su $\overline{ab}$.

b) Se $\overline{D}_+F(x)$ è finita in ogni punto di $\overline{ab}$, l'insieme dei punti di $\overline{ab}$ in vicinanza dei quali $\overline{D}_+F(x)$ è non limitata superiormente è non denso in $\overline{ab}$.

c) Se $\overline{D}_+F(x)$ e $\underline{D}_+F(x)$ sono finite in tutti i punti di $\overline{ab}$ e se M è un qualunque aggregato chiuso contenuto in $\overline{ab}$, l'insieme dei punti di M in vicinanza dei quali $\overline{D}_+F(x)$ è non limitata superiormente rispetto ad M e l'insieme dei punti di M in vicinanza dei quali $\overline{D}_+F(x)$ è non limitata inferiormente rispetto ad M sono ambedue chiusi e non densi in M.

d) Se l'aggregato dei punti di discontinuità di $F(x)$ è denso in $\overline{ab}$, l'aggregato dei punti x in cui è verificata almeno una delle due uguaglianze $\overline{D}_+F(x) = +\infty$, $\underline{D}_+F(x) = -\infty$, è denso in $\overline{ab}$.

e) Se l'aggregato dei punti in cui $F(x)$ ha una discontinuità di 2ª specie è denso in $\overline{ab}$, l'aggregato dei punti x in cui sono verificate entrambe le uguaglianze $\overline{D}_+F(x) = +\infty$, $\underline{D}_+F(x) = -\infty$, è denso in $\overline{ab}$.

Naturalmente nei punti di continuità vi è luogo a considerare anche i numeri derivati a sinistra $\overline{D}_-F(x)$ e $\underline{D}_-F(x)$. Per essi dimostro che:

f) Se l'aggregato dei punti di discontinuità è denso in $\overline{ab}$, l'aggregato dei punti di continuità in cui da ogni parte almeno uno dei numeri derivati estremi è infinito, è denso in $\overline{ab}$.

Dimostro anche la proposizione seguente:

g) Se $F(x)$ è ovunque derivabile verso destra in $\overline{ab}$, l'aggregato dei punti di discontinuità di $F(x)$ è ovunque non denso in $\overline{ab}$.

4. Nelle dimostrazioni ricorre più volte un tipo di ragionamento del quale, ridotto alla sua forma più semplice, voglio quì dare un saggio. Dimostrerò per via diretta, cioè senza far uso del teorema fondamentale, la proposizione enunciata sotto la lettera *d)* del n.° 3.

Sia N l'aggregato dei punti di discontinuità di $F(x)$, denso in $\overline{ab}$, e sia d_1 un punto qualunque di N in $\overline{ab}$. Esiste in $\overline{ab}$ un punto $c_1 < d_1$ tale che $\left|\dfrac{F(d_1) - F(c_1)}{d_1 - c_1}\right| > 1$ ed esiste, per la continuità a destra di $F(x)$ in c_1, un intorno destro σ_1 di c_1 tale che, per qualunque valore di x ad esso appartenente è $\left|\dfrac{F(d_1) - F(x)}{d_1 - x}\right| > \dfrac{1}{2}$. Sia d_2 un punto qualunque di N in σ_1 e $c_2 < d_2$ un altro punto di σ_1 tale che $\left|\dfrac{F(d_2) - F(c_2)}{d_2 - c_2}\right| > 2$. Sia σ_2 un intorno destro di c_2, interamente contenuto in σ_1, tale che, per qualunque valore di x ad esso appartenente, è $\left|\dfrac{F(d_2) - F(x)}{d_2 - x}\right| > 1$. Così si prosegua indefinitamente. In generale in σ_n si considererà un punto qualunque d_{n+1} di N e un punto $c_{n+1} < d_{n+1}$ tale che $\left|\dfrac{F(d_{n+1}) - F(c_{n+1})}{d_{n+1} - c_{n+1}}\right| > n + 1$, poi s'indicherà con σ_{n+1} un intorno destro di c_{n+1}, interamente contenuto in σ_n, tale che, per qualunque valore di x ad esso appartenente è $\left| \frac{F(d_{n+1}) - F(x)}{d_{n+1} - x} \right| > \frac{n+1}{2}$. La successione di segmenti σ_1, $\sigma_2, \ldots \sigma_n, \sigma_{n+1}, \ldots$ ammette un punto limite x_0 tale che è $\overline{D}_+F(x_0) = +\infty$, oppure $\underline{D}_+F(x_0) = -\infty$ e per l'arbitrarietà della scelta di d_1 i punti come x_0 costituiscono un aggregato denso in $\overline{ab}$. c. d. d.

5. Una buona parte della mia tesi è dedicata alla classificazione secondo BAIRE. Per le funzioni continue bilateralmente, sono note le due proposizioni seguenti: *la derivata di una funzione continua e derivabile è una funzione di 1ª classe di Baire* (cioè limite di una successione di funzioni continue); *se le derivate estreme di una funzione continua sono finite, esse sono funzioni di 2ª classe di Baire* (cioè limiti di successioni di funzioni di 1ª classe). Ora, poichè una funzione continua soltanto verso destra si può definire come limite di una successione di funzioni continue, l'immediata estensione dei ragionamenti che si fanno per le funzioni continue permetterebbe soltanto di concludere che: *la derivata destra di una funzione continua verso destra e derivabile verso destra è una funzione di 2ª classe; se le derivate estreme destre di una funzione continua verso destra sono finite, esse sono di 3ª classe.*

Io dimostro invece che, per le funzioni continue verso destra, la classificazione delle derivate e delle funzioni–numeri derivati è la stessa che per le funzioni continue bilateralmente.