Bollettino Unione Matematica Italiana

Edvige Simonetto

# Sopra alcune varietà dello spazio hilbertiano

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **10** (1931), n.1, p. 14–16.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_14_0>

## Sopra alcune varietà dello spazio hilbertiano.

Nota di EDVIGE SIMONETTO (a Camposampiero)

**Sunto.** - *L'A. dimostra che, quando nel* $\Pi_2$ *di una varietà esiste un parametro che ha per covariante associato quello costituito dai coefficienti del quadrato dell'elemento lineare, le* $E_p$ *sono coni i cui vertici costituiscono una varietà che corrisponde per ortogonalità di elementi alla data.*

**1.** Sia $V_n$ una varietà dello spazio hilbertiano e sia

$$f(t,\, u_1,\, u_2, \ldots,\, u_n)$$

una determinante di $V_n$.

Sia $P$ un punto generico di $V_n$ e supponiamo che il $\Pi_2$ per $P$ abbia $\nu$ dimensioni.

Indichiamo con

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

parametri normali e a due a due ortogonali di questo $\Pi_2$, con

$$\underset{i}{x_{r,s}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

i covarianti associati a questi $\nu$ parametri e con $a_{r,s}$ i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare cosicchè, si avrà

$$\underset{i}{x_{r,s}} = \int_g f_{r,s} \underset{i}{X} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{1}$$

$$a_{r,s} = \int_g f_r f_s\, dt. \tag{2}$$

Supponiamo che fra i $\nu + 1$ sistemi (1) e (2) esista una relazione lineare; ciò significa che esisteranno delle

$$\underset{i}{\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

per cui

$$\sum_{1}^{\nu}{}_i \underset{i}{\lambda} \underset{i}{x_{r,s}} = a_{r,s}. \tag{3}$$

Questa relazione, quando si ponga

$$Y = \sum_{1}^{\nu}{}_i \underset{i}{\lambda} \underset{i}{X}$$

diventa, quando si tien conto delle (1),

$$\int_g f_{r,s}\, Y dt = a_{r,s}. \tag{3'}$$

Questo risultato si può leggere dicendo che: quando sono soddisfatte le (3), esiste un parametro $Y$ di $H_2$ che ha per covariante associato il sistema $a_{r,s}$.

**2.** Se

$$\underset{i}{x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

sono le coordinate di un punto del $H_2$ rispetto al sistema cartesiano che ha per origine il punto $P$ e per assi le rette di parametri

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

la $E_p$ [1] ha per equazione

$$\left| a_{r,s} - {\textstyle\sum_{1}^{\nu}}{}_i\, \underset{i}{x}\, \underset{i}{x}_{r,s} \right| = 0. \tag{4}$$

Sostituendo in (4) al posto di $a_{r,s}$ il primo membro della (3), la (4) diventa

$$\left| {\textstyle\sum_{1}^{\nu}}{}_i\, (\underset{i}{\lambda} - \underset{i}{x})\, \underset{i}{x}_{r,s} \right| = 0. \tag{4'}$$

Da questa equazione risulta che la $E_p$ è un cono il cui vertice ha per coordinate le

$$\underset{i}{\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Col variare del punto $P$ sulla $V_n$ il vertice della $E_p$ descrive un'altra varietà $W_n$. Vale il

Teorema: Nelle ipotesi fatte la $V_n$ e la $W_n$ hanno in punti corrispondenti gli $S_n$ tangenti fra loro ortogonali, o, come si potrebbe dire, si corrispondono per ortogonalità di elementi.

Dim. — La $W_n$ ha per determinante

$$F = f + {\textstyle\sum_{1}^{\nu}}{}_i\, \underset{i}{\lambda}\, \underset{i}{X}. \tag{5}$$

Basterà allora provare che

$$\int_g f_r F_s dt = 0.$$

[1] G. Vitali, *Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano.* « Annali di Matematica », serie IV, tomo VIII (1930-31), pp. 161-172.

Ora

$$F_s = f_s + \sum_1^\nu {}_i \lambda_s \underset{i}{X} + \sum_1^\nu {}_i \lambda \underset{i}{X_s},$$

dove $\underset{i}{\lambda_s}$ indica, al solito, derivata di $\underset{i}{\lambda}$ rispetto ad $u_s$.

Moltiplicando per $f_r$ ed integrando si ha

$$(6) \qquad \int_g F_s f_r\, dt = \int_g f_s f_r\, dt + \sum_1^\nu {}_i \underset{i}{\lambda_s} \int_g f_r \underset{i}{X}\, dt + \sum_1^\nu {}_i \underset{i}{\lambda} \int_g \underset{i}{X_s} f_r\, dt.$$

Osservando che

$$\int_g f_r \underset{i}{X}\, dt = 0,$$

perchè le $\underset{i}{X}$ sono ortogonali alla $V_n$, osservando inoltre che derivando covariantemente rispetto ad $u_s$ si ha

$$\int_g f_{r,s} \underset{i}{X}\, dt + \int_g f_r \underset{i}{X_s}\, dt = 0$$

e quindi, per le (1),

$$\int_g f_r \underset{i}{X_s}\, dt = - \underset{i}{x_{r,s}},$$

si vede, tenendo inoltre conto della (2), che la (6) diventa

$$\int_g f_r F_s\, dt = a_{r,s} - \sum_1^\nu {}_i \underset{i}{\lambda} \underset{i}{x_{r,s}}$$

e quindi per la (3)

$$\int_g f_r F_s\, dt = 0, \qquad\qquad \text{c. d. d.}$$

**3.** La condizione (3), che noi abbiamo supposto per la $V_n$, è certamente soddisfatta quando il numero delle dimensioni di $\Pi_2$ è il massimo possibile, ossia quando $\nu = \binom{n+1}{2}$.

Abbiamo così il

COR. — Per una varietà generica la $E_p$ è un cono e la varietà $W_n$ descritta dal vertice di questo cono corrisponde per ortogonalità di elementi alla data.