Recensioni

* P. Burgatti, T. Boggio, 0. Burali-Forti: Geometria Differenziale. (Volume II dell'Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni)
* Arthur B. Coble: Algebraic Geometry and Theta Functions
* G. Hoheisel: Gewöhnliche Differentialgleichungen
* W. Rogosinski: Fouriersche Reihen
* G. Fubini e G. Vivanti: Esercizi di Analisi matematica. (Calcolo infinitesimale)
* K. Hayashi: Tafeln des Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen
* K. Hayashi: Fünfstellige Funktionentafeln

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 295–307.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_295_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

RECENSIONI

P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI: *Geometria Differenziale.* (Volume II dell'*Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni*). Bologna, Zanichelli, 1930; pagg. IX-338.

Quest'opera vuol essere [1] una *introduzione* allo studio della geometria differenziale metrica e proiettiva delle superficie e varietà, condotta coi metodi dell'*Analisi vettoriale generale*: calcolo vettoriale e omografico ordinario e generalizzazioni, calcolo geometrico del PEANO. Dunque il lettore non vi troverà — nè d'altra parte la mole del libro, non piccola ma sempre modesta rispetto alla vastità e molteplicità degli argomenti trattati, lo consentirebbe — degli sviluppi ampi e completi delle varie teorie prese in considerazione: ma, per ciascuna, una sobria e lucida esposizione degli elementi essenziali. Tale esposizione è condotta con procedimenti eleganti e spesso spiccatamente originali, che indubbiamente costituiscono la novità più notevole in questa *Geometria Differenziale*: opera del resto sotto ogni riguardo interessante ed attraente, e di lettura abbastanza agevole per chiunque sia iniziato ai metodi vettoriali. Gli AA. hanno inteso appunto, sopratutto, di mostrare in azione, applicandoli allo studio di alcune teorie geometriche fra le più suggestive, attualmente di grande interesse anche pei cultori di scienze applicate, i loro metodi assoluti: dando così una dimostrazione evidente e palpabile della bontà e dell'efficacia di questi metodi. In complesso, se pure nei particolari qualche ulteriore perfezionamento nei metodi può apparire ancora desiderabile, la dimostrazione che gli AA. si propongono appare assai bene riuscita; ed è sperabile che la lettura di quest'opera possa far cadere quelle ingiuste prevenzioni, tuttora diffuse, contro i metodi assoluti nella Geometria, non a torto dagli AA. stessi lamentate [2].

Il calcolo vettoriale ordinario ci emancipa dall'uso delle coor-

[1] Ved. Prefazione, pag. IV.

[2] Prefaz., pag. VIII, nota [3].

dinate *cartesiane*, come ormai tutti sanno: ossia ci permette di farne a meno quando si voglia; il che non toglie naturalmente che le coordinate cartesiane possano rendere e rendano ancora preziosi servigi! Assai più grossa questione è il liberarsi dalle coordinate *curvilinee* nello studio degli spazi curvi. Come è noto il RICCI, rinunciando a sopprimere le coordinate, ha raggiunto egualmente, col suo Calcolo assoluto (¹), quello che è lo scopo essenziale, ossia l'*indipendenza* dal riferimento. Ma, a parte l'avversione che molti hanno, a torto o a ragione, per le notazioni *a più indici* del calcolo di RICCI, l'arrivare a una liberazione completa dalle coordinate (e quindi dagli indici!) restava una meta ideale, naturalmente ambita. Tale meta viene raggiunta dagli AA. della I e della II Parte di questo volume (dedicate a studi di geometria *metrica* differenziale, relativi agli enti dello spazio ordinario, e alle varietà riemanniane a più dimensioni, rispettivamente) per vie diverse. In sostanza, nella I Parte l'A. — che del resto non rifugge dal far uso talora anche delle coordinate curvilinee — opera *nello spazio ambiente*, col calcolo vettoriale e omografico ordinario arricchito di speciali operatori definiti in relazione all'ente da studiare; nella II Parte invece si fa uso di un procedimento intrinseco, il calcolo delle *iperomografie*, od omografie d'ordine qualunque, completato col *differenziale superficiale*, operatore di significato intrinseco ma definito con l'ausilio di un ambiente euclideo.

Nella III Parte si passa ad un diverso ordine di ricerche, e cioè, ad alcuni elementi della geometria *proiettiva* differenziale nello spazio ordinario; per la quale l'A. adotta gli enti e le operazioni del *calcolo geometrico* del PEANO. Sia pel contenuto che pei metodi adottati, le tre Parti del volume sono ben distinte e autonome, per quanto l'opera riveli, nel suo complesso, una sostanziale unità di vedute e d'indirizzi. Ne riferirò separatamente, limitandomi alle linee generali e a qualche accenno a particolari più degni di nota.

Troviamo nella I Parte, redatta dal prof. BURGATTI, una spigliata, vivace esposizione di alcuni dei più interessanti Capitoli della Geometria Differenziale classica. Riconosciamo quà e là, specialmente nel Cap. I, tradotti in linguaggio vettoriale — il che non ne diminuisce l'eleganza, e li rende più concisi ed espressivi — alcuni procedimenti euristici e dimostrativi delle « Lezioni » del BIANCHI: era giusto e doveroso non privarne il lettore. Ma

(¹) Nei riguardi di questo Calcolo e delle sue applicazioni alla Geometria, che ne costituiscono la principale ragion d'essere, non condivido affatto le idee espresse dagli AA. di questo Volume (Prefaz., pag. V).

in complesso il metodo d'esposizione nelle linee generali e anche nei particolari porta ben netta l'impronta personale dell'A. Notiamo specialmente nel Cap. I, dedicato alla *Teoria delle curve gobbe*, la forma cinematica delle formule di FRENET (p. 5), lo studio delle curve sferiche e delle trasformazioni asintotiche delle curve; nel Cap. II, contenente gli elementi fondamentali della *Teoria delle superficie*, anzitutto l'introduzione degli operatori superficiali grad_s, div_s, rot_s [1], e dell'omografia $\sigma = \frac{dn}{dP}$ (p. 34): che equivale naturalmente alla seconda forma fondamentale delle superficie $\left(\text{di componenti } \omega_{rs} = -\frac{\partial P}{\partial u^r} \times \frac{\partial n}{\partial u^s}\right)$ ma dà in modo ben più semplice ed espressivo ad es. le due curvature, media e totale (che sono $I_1\sigma$ e $I_2\sigma$) e le direzioni principali. Nello stesso Cap. II va osservata anche una interessante forma delle equazioni fondamentali per la teoria delle superficie (p. 52), ottenuta mediante l'introduzione di una omografia degenere γ che ha un semplice significato geometrico (p. 53); e una forma notevole delle equazioni di GAUSS e CODAZZI (le (II) p. 54) [2], in cui intervengono, anzichè i coefficienti delle due forme fondamentali, elementi assoluti, e cioè le curvature principali e le curvature geodetiche delle linee di curvatura. Lo studio delle *Linee geodetiche* e nozioni che vi si connettono (superficie di LIOUVILLE, torsione geodetica) viene rapidamente svolto nel Cap. III. Il confronto con le « Lezioni » del BIANCHI, cioè, il paragone di ciò che, in buone mani, possono dare i procedimenti scalari e vettoriali, riesce qui interessantissimo: si osservino la forma (4) (p. 64) dell'equazione di GAUSS per le geodetiche, e i semplicissimi sviluppi per ottenerla! Nel

(1) È da notarsi che il $\mathrm{rot}_s w$ secondo il BURGATTI, anche quando il vettore w è superficiale, non coincide affatto con l'ente che usualmente viene definito quale *rotore di un vettore* su di una superficie o varietà (Ved. p. es. v. LAUE, *Die Relativitätstheorie* 2 B., p. 86; CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, p. 93). Questo ente (usando per semplicità le notazioni del calcolo di RICCI) è lo scalare $\frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2}$ $(u^1 = u, u^2 = v)$ (o, se si vuole, il bivettore che ha quest'unica componente), mentre $\mathrm{rot}_s w$ secondo il BURGATTI viene ad essere il vettore $b^{rs} \frac{\partial P}{\partial u^r} \wedge \frac{\partial w}{\partial u^s}$ (b^{rs} tens. fondam. controvariante), che ha $\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2}\right)$ come componente normale ($b = |b_{rs}|$) ma ha anche una componente tangenziale generalmente non nulla.

(2) Cfr. BLASCHKE, *Vorl. über Differentialgeometrie*, I, 3ª ed., p. 138, form. (90) e (91).

Cap. IV lo studio delle *Superficie rigate* viene condotto, in sole dieci pagine, fino alla deformazione di esse coi metodi di MINDING e di BELTRAMI [1]. Nel Cap. V, dedicato alle *Rappresentazioni delle superficie e superficie applicabili*, è da notarsi lo studio abbastanza dettagliato condotto, secondo il BOTTASSO, sugli invarianti di flessione (la ricerca dei quali riesce abbastanza semplice, benchè si operi sempre nello spazio ambiente). Lo studio delle *Congruenze di rette* è svolto con una relativa ampiezza nel Cap. VI; infine si ha un Capitolo (VII) sui *Sistemi tripli ortogonali*. Molto interessante è, a questo proposito, il gruppo di formule fondamentali del PENSA (p. 121), estensione delle formule di FRENET, e pure suscettibili (come le analoghe per le curve e per le superficie) di elegante interpretazione cinematica. L'omografia γ che figura in queste formule è in semplice relazione coi coefficienti di rotazione del RICCI [2], e le equazioni del PENSA sono in sostanza equivalenti a note formule di RICCI e LEVI-CIVITA [3], ma riescono indubbiamente assai più espressive.

Veniamo alla Parte II, redatta dal prof. BOGGIO. Questo interessante tentativo di costruzione assoluta di una geometria riemanniana è basato, come già accennai, sul calcolo delle omografie (d'ordine qualunque) negli spazi a più dimensioni, che qui viene sviluppato, dopo un accenno rapido (un pò alla buona) alla nozione di spazio euclideo n–dimensionale, nel Cap. I (*Vettori e omografie in spazi euclidei*). L'omografia d'ordine $r (\geq 0)$ è un aspetto particolare di quell'ente che noi (intendo: io e i più di quanti ora si occupano, in Italia e fuori, di calcolo assoluto e di geometria differenziale) siamo ormai abituati a chiamare *tensore* [4]. Un tensore d'ordine $r+1$ nella geometria metrica può manifestamente considerarsi, e anzi in $r+1$ diversi modi, come un operatore

(1) Data anche la parte di prim'ordine che in altri Capitoli, giustamente, viene qui data alle formule di FRENET e loro generalizzazioni, avrei visto volontieri in questo Capitolo un cenno sulle formule di FRENET per le rigate, e sull'elegante rappresentazione intrinseca delle rigate secondo SANNIA (« Giorn. di Matem. », vol. 63, 1925).

(2) È

$$\gamma v = \frac{di}{dP} v \times j \cdot k + \frac{dj}{dP} v \times k \cdot i + \frac{dk}{dP} v \times i \cdot j = \Sigma_r (\gamma_{12} r k + \gamma_{23} r i + \gamma_{31} r j) v_r$$

ove

$$v_1 = v \times i, \quad v_2 = v \times j, \quad v_3 = v \times k.$$

(3) Ved. ad es. LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 289, form. (16).

(4) Si veda la nota a p. 150.

fra r–ple ordinate di vettori e vettori: in questo senso viene detto una omografia d'ordine r, e come tale è suscettibile di una costruzione diretta e assoluta, senza alcun ricorso a riferimenti. Si può dire che l'omografia è un tensore nel quale uno degli indici ha un comportamento privilegiato rispetto agli altri. Questo inconveniente si potrebbe evitare introducendo (come fa, più o meno esplicitamente, qualche Autore di Calcolo Tensoriale ([1])) il tensore di ordine $r+1$ come *operatore fra* (r + 1)*–ple ordinate di vettori e scalari*. Ma l'inconveniente detto sopra in realtà non è tale dal punto di vista dell'A. del presente lavoro, che non preoccupandosi delle relazioni col calcolo di RICCI, procede indipendentemente da ogni rappresentazione scalare. Ai passaggi dall'una all'altra omografia corrispondenti allo stesso tensore egli provvede in sostanza mediante l'operatore lineare K, opportunamente combinato con gli altri operatori k e k^* (pp. 151 e seg.); operatori definiti però in modo diretto e assoluto. Il procedimento seguito per definire K, k, k^* e gli altri operatori I_1, V è particolarmente elegante; il lettore potrà giudicare se l'algoritmo così ottenuto ([2]) riesce di semplicità e agilità paragonabili con quelle dell'Algebra Tensoriale di RICCI ([3]). L'A. passa poi all'Analisi per le omografie di ordine qualunque (μ_r) in uno spazio euclideo, definendo la derivata rispetto ad un punto, il gradiente e la divergenza ([4]) di una μ_r, sempre come estensioni delle analoghe operazioni per le μ_1. Nel Cap. II (*Spazi curvi e loro geodetiche*) ha inizio lo studio differenziale vero e proprio delle V_n (definite per via assoluta) (p. 161). Dopo alcune generalità e una dimostrazione in forma vettoriale (sostanzialmente non dissimile da quella usuale) del teorema di SCHLÄFLI, l'A. stabilisce una semplice espressione (p. 171) della

([1]) Ved. p. es. v. LAUE, loc. cit., pp. 42, 47.

([2]) che forse risente un pò della sua origine, cioè presenta vari elementi forse più appropriati al caso particolare delle omografie di ordine 1 che al caso generale. Ad es. l'applicazione dell'operatore K a un'omografia d'ordine qualunque equivale allo scambio dell'indice privilegiato (sia ad es. il 1°) e dell'ultimo indice nel corrispondente tensore: ora ciò ha un significato di ben diversa portata nel caso di un tensore d'ordine 2 e nel caso generale.

([3]) Osserverò ancora che non vedo bene perchè $I_1\mu_r$ venga riguardata come un'omografia d'ordine r (p. 151) anzichè d'ordine $r-2$: nel calcolo tensoriale ciò equivale a un'arbitraria moltiplicazione per ε_s^{k}. A questa stregua l'ordine di una omografia si può a piacere accrescere di un qualunque multiplo del 2.

([4]) A proposito della definizione di divergenza, a p. 157, riga 9 deve certo leggersi $r+1$ anzichè $r-1$. (Cfr. nota prec.).

prima variazione di un arco di curva della V_n e ne ricava le più essenziali proprietà delle geodetiche. Nel Cap. III (*Omografia di Riemann*) [1] l'A. stabilisce anzitutto la nozione di differenziale superficiale su di una V_n, quale componente secondo V_n del differenziale calcolato in uno spazio ambiente euclideo [2]. Naturalmente, ciò equivale a introdurre la nozione di parallelismo di LEVI-CIVITA, e io penso che la trattazione dell'A. guadagnerebbe forse in chiarezza ed espressività se egli facesse uso fin da principio di questo equivalente geometrico del suo operatore differenziale, anzichè rimandare lo studio del parallelismo all'ultimo Capitolo (p. 256 e seg.) come una « applicazione » della teoria prima svolta! Lo studio del differenziale superficiale è svolto abbastanza ampiamente nel Cap. III: in particolare ne risulta, quale espressione della non-commutabilità dei differenziali superficiali secondi, l'omografia di RIEMANN; cioè il tensore di curvatura riemanniana (come nelle trattazioni di SCHOUTEN e STRUIK). Trattandosi, com'è noto, di un tensore del 4° ordine, la corrispondente omografia è del 3° ordine; indubbiamente essa è più espressiva, e anche le dimostrazioni delle classiche quattro identità del tensore di curvatura riescono, nell'attuale trattazione, di notevole semplicità. Così pure le ulteriori ricerche sull'omografia di RIEMANN, le quali proseguono nel Cap. IV con lo studio della *Curvatura di Riemann* scalare (a proposito della quale si ha una interessante dimostrazione del teorema di SCHUR), e delle relazioni fra le omografie di RIEMANN per due spazi posti in corrispondenza (con particolare riguardo al caso in cui questa è una rappresentazione conforme, o un'applicabilità). Il Cap. V è dedicato alle *Curve ed ipersuperficie degli spazi curvi* (per le prime si ha un breve cenno, contenente alcuni teoremi sulla prima curvatura e sulla prima normale principale; per le seconde si ha una sintetica esposizione di quelle che il

(1) che sviluppa, come i tre seguenti, nozioni e vedute già sinteticamente esposte dall'A. in alcune Note Lincee di questi ultimi anni.

(2) Questa nota proprietà (cfr. ad es. SCHOUTEN e STRUIK, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, « Christiaan Huygens », Groningen, t. I. 1921-22 e t. II, 1922-23, p. 47 dell'estratto) non era finora stata assunta, che io sappia, come definizione del differenziale superficiale, o cogrediente (se non si tien conto di una Nota (isolata) del RUNGE (1922), nè di una breve trattazione elementare nei miei *Esercizi di Geometria Analitica* (1926)) che nelle mie lezioni di Geometria Superiore (dal 1927-28) e in un mio lavoro del 1928, non ancora pubblicato. Mi rallegro nel notare che per questa via, assai poco frequentata (i più preferiscono operare con le derivate covarianti anzichè col corrispondente differenziale, geometricamente più espressivo) si è diretto anche l'A. del presente lavoro.

Cartan chiama le proprietà *di curvatura euleriana,* basata naturalmente sull'omografia σ (p. 224), analoga a quella introdotta nella Parte I per le superficie); e ad un cenno sui sistemi n-pli ortogonali in V_n. Noterò ancora una semplice dimostrazione del teorema di Liouville (p. 234 e seg.). Nel Cap. VI (*Curvatura delle ipersuperficie degli spazi curvi*) si pongono in relazione le proprietà di curvatura riemanniana di una V_{n-1} con quelle di una V_n ambiente, stabilendo formule abbastanza semplici che traducono le equazioni di Gauss e Codazzi; e si trattano poi svariate questioni particolari. Infine come *Applicazioni* nel Cap. VII si studiano, oltre al parallelismo di Levi-Civita (come già ho accennato), abbastanza ampiamente le n-ple ortogonali di congruenze, secondo Ricci e Levi-Civita [1]. L'A. introduce, in relazione coi coefficienti di rotazione di Ricci, un'omografia del 2° ordine, Ω_2 (p. 277), che corrisponde proprio al tensore $T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ introdotto da me e, in altro modo, dal Tonolo (φ_{pqt}) [2]. Il Capitolo termina con un cenno sul metodo seguito dall'A. e dal prof. Burali-Forti in un precedente libro sugli spazi curvi [3], e sulle relazioni fra gli algoritmi qui sviluppati e il calcolo del Ricci. A proposito di quella che l'A. chiama omografia di Christoffel, noterò che tale omografia non è più espressiva, nè più semplicemente ottenuta, del corrispondente simbolo. Non v'è che un modo di rendere relativamente espressivi i simboli $\left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\}$, ed è (credo) di considerarli come i coefficienti degli pfaffiani $\omega_r^t = \left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\} du^s$ che definiscono l'isomeria vettoriale infinitesima $dv^t + \omega_r^t v^r = 0$, traducente il trasporto parallelo di Levi-Civita.

Verrò infine a un cenno sulla Parte III, redatta dal prof. Burali-Forti. Ho già detto qual'è il mezzo d'indagine che l'A. ap-

(1) Qui il passaggio alla forma vettoriale, seguita naturalmente dall'A., da quella ben nota di Ricci e Levi-Civita, è ovvio e immediato; ad es. la form. (17) pag. 265 è la diretta traduzione vettoriale della formula di definizione di Ricci (Levi-Civita, loc. cit., pag. 287, form. [13]): certo più semplice ed espressiva.

(2) L'affermazione (p. 276) che le γ_{hkl} costituiscano un *tensore triplo* va intesa in questo senso: si tratta di un tensore non per *tutte* le trasformazioni lineari ortogonali sui campi di vettori unitari a_r che definiscono l'n-pla, ma per le sole trasformazioni ortogonali *a coefficienti costanti*: questo è il caso particolare che si è presentato in un gruppo di ricerche recenti, a cui appartiene il lavoro del Levi-Civita che l'A. cita alla seguente pag. 277.

(3) *Espaces courbes, critique de la relativité,* Torino, S. T. E. N., 1924.

plica nella geometria proiettiva differenziale. Che le *formazioni geometriche* del PEANO siano adatte a rapprentare enti proiettivi è ben noto; si può soltanto osservare che ne risulta una geometria proiettiva in qualche modo *subordinata a quella metrica*, perchè (ad es.) i punti impropri, rappresentati da formazioni a massa nulla (secondo il PEANO) risultano intrinsecamente distinti da quelli propri. Ma questo in certo senso è un vantaggio, perchè permette di passare assai agevolmente ad interpretazioni metriche degli enti proiettivi ottenuti. A parte il diverso significato delle notazioni, il calcolo che qui sviluppa l'A. non presenta differenze essenziali da quello che viene comunemente usato per la Geometria proiettiva differenziale. Da un pezzo i cultori di questa Geometria hanno osservato come fosse superfluo il portarsi dietro negli sviluppi gli indici distinguenti le singole coordinate proiettive; e parlano senz'altro del punto x, del piano ξ, della retta (xy) (avente per coordinate i minori della matrice costruita con le coordinate dei punti x, y) ecc.. Ma ha un notevole interesse concettuale, se non formale, il poter considerare l'ente x su cui si opera non come una espressione sintetica, abbreviata del sistema delle quattro coordinate di un punto, ma come il punto stesso, o meglio, una delle ∞^1 formazioni di prima specie p aventi quel punto come *posizione*; il potere interpretare (xy) non come espressione sintetica dei minori di una certa matrice, ma come prodotto alternato dei due punti, ecc.. Nel Cap. I (*Sistemi lineari di formazioni geometriche*) l'A. introduce gli enti lineari dello spazio proiettivo come sistemi lineari a due, tre, quattro dimensioni di forme geometriche, e dà un breve cenno sullo studio delle omografie fra F_r ed F_s $(r, s=1, 2, 3)$, condotto come estensione di quello delle omografie vettoriali ordinarie. *Alcune nozioni fondamentali* di geometria generale e proiettiva differenziale sono introdotte nel Cap. II: linee, inviluppi; superficie rigate, congruenze,...; piano tangente, punto di contatto,...; e si giunge poi in modo particolarmente semplice alle forme fondamentali di FUBINI per una superficie. E infine con l'uso degli elementi introdotti, alcune delle più fondamentali *Proprietà generali delle superficie* vengono studiate nel Cap. III (direzioni coniugate ed asintotiche, linee di DARBOUX e di SEGRE, quadriche osculatrici). Ciò costituisce indubbiamente, come l'A. stesso avverte (Prefaz., pag. IX) una piccola parte della teoria di cui qui sono abbozzati i primi elementi; ma « sufficiente per continuarne lo studio in maniera veramente geometrica ». È da augurarsi che qualcuno fra i lettori, che a questo interessante volume certo non mancheranno, raccolga l'invito.

ENEA BORTOLOTTI

ARTHUR B. COBLE: *Algebraic Geometry and Theta Functions.* « American Mathematical Society Colloquium Pubblications ». Vol. X, 1929, pagg. 282+VII.

È noto che le trasformazioni Cremoniane piane si esprimono come prodotti di trasformazioni quadratiche: il COBLE chiama generalmente trasformazioni Cremoniane *regolari* dello spazio S_k a k dimensioni quelle trasformazioni (inclusive le collineazioni) che si esprimono come prodotti di trasformazioni (d'ordine k) a $k+1$-edro fondamentale. Nel caso di $k=1$ sono dunque precisamente il gruppo delle collineazioni; nel caso di $k=2$ sono il gruppo delle trasformazioni Cremoniane piane; in quello di $k=3$ quello dei prodotti di trasformazioni cubiche a tetraedro fondamentale, e così via. Questo gruppo di trasformazioni gode di talune proprietà notevoli delle trasformazioni Cremoniane piane in rapporto alla formazione del sistema dei punti fondamentali e alla trasformazione delle singolarità: il sistema dei punti fondamentali si compone, per ciascuna trasformazione dello stesso numero di punti nel 1° e nel 2° spazio e i « caratteri numerici » *ordine* e *multiplicità dei punti* corrispondenti delle varietà corrispondenti di dimensione $k-1$ sono legati da una semplice sostituzione lineare a coefficienti interi.

Fissato, col COBLE, un sistema qualunque P_m^k di m punti di S_k, chiamiamo ad esso equivalente ogni sistema di punti che si ottenga da esso assoggettando lo spazio ad una trasformazione Cremoniana regolare che abbia tutti i suoi ρ punti fondamentali fra gli m punti di P_m^k ed associando gli $m-\rho$ punti trasformati dei restanti $m-\rho$ punti di P_m^k coi ρ punti fondamentali della trasformazione nel 2° spazio (trasformato). Tutti i sistemi equivalenti a P_m^k constano dunque dello stesso numero di punti e sono a due a due equivalenti fra loro. Le trasformazioni Cremoniane che fanno passare dall'uno all'altro costituiscono un gruppo, al quale si associa un *gruppo aritmetico* $g_{m,k}$ formato dalle suddette sostituzioni lineari fra i caratteri numerici delle varietà corrispondenti nei punti dei sistemi P_m^k e suoi equivalenti. Se in queste sostituzioni lineari si riducono i coefficienti rispetto al mod. 2, si ottiene un gruppo isomorfo al gruppo modulare di una classe conveniente di funzioni teta o di un sottogruppo di questo.

D'altra parte al sistema di punti P_m^k e a tutti i sistemi equivalenti si può far corrispondere una configurazione di punti dello spazio Σ a $k(m-k-2)$ dimensioni, assumendo come coordinate dei singoli punti della configurazione le coordinate projettive, in S_k, di $m-k-2$ punti di uno dei predetti sistemi rispetto ai restanti $k+2$ punti del sistema medesimo assunti come sistema di riferimento, e ciò in tutti i modi possibili. Tale configurazione si trasforma in sè stessa per un gruppo $G_{m,k}$ di trasformazioni Cremoniane di Σ, determinato dal predetto $g_{m,k}$ e quindi da P_m^k. La stessa configurazione corrisponde, colla stessa costruzione e colle stesse proprietà, al sistema di punti Q_m^{m-k-2} di un S_{m-k-2} (e ai sistemi equivalenti a questo) che il COBLE chiama associato a P_m^k e che egli definisce mediante il sistema di condizioni di apolarità:

$$q_{1i}p_{1j} + q_{2i}p_{2j} + \dots + q_{mi}p_{mj} = 0$$

per $i = 1, 2,..., m-k-1$, $j = 1, 2,..., k+1$ e dove le p_{mj} sono le coordinate del j-mo punto di P_m^k e le q_{mi} sono quelle del i-mo punto di Q_m^{m-k-2}.

Queste osservazioni formano il punto di partenza di un gruppo di lavori dell'A. che si estendono per una quindicina d'anni dal 1908 al 1924, nei quali si approfondiscono i rapporti che da esse emergono fra i gruppi di trasformazioni Cremoniane e la teoria della periodicità delle funzioni teta. Ne risulta un punto di vista più strettamente geometrico dal quale si possono riassumere le applicazioni, in buona parte note e appartenenti agli ultimi decenni del secolo scorso, della teoria delle funzioni teta allo studio delle configurazioni di contatto connesse con alcune notevoli curve e superficie (quartica piana, superficie di KUMMER e di WEDDLE, sestica di genere 4 di WIRTINGER, simmetroide di CAYLEY) nelle quali primeggiano i nomi di SCHOTTKY e di WIRTINGER.

A tale esposizione è destinato il presente volume il quale è stato occasionato da un corso di letture tenute dall'A. nel settembre 1928 a Amherst sopra la *Determinazione dei piani tritangenti alla sestica gobba di genere 4.*

Dopo due Capitoli di preliminari di geometria algebrica e di preliminari sopra le funzioni teta, seguono quattro Capitoli più precisamente destinati alle applicazioni che formano l'argomento principale: applicazioni geometriche delle funzioni di genere due, delle funzioni di genere tre, delle funzioni di genere quattro. Chiude il volume un'accurata bibliografia. *(ellebi)*

G. HOHEISEL: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* W. de Gruyter & C., Berlin-Leipzig, 1930, pagg. 159.

Questo volumetto appartiene alla raccolta di manuali che, facendo parte della ben nota « Sammlung Göschen », trattano, per opera di competenti Autori, in modo succinto ma, per quanto è possibile, esauriente, i più importanti Capitoli della matematica pura ed applicata e della fisica teorica. Esso si riferisce alle equazioni differenziali ordinarie. Un primo Capitolo tratta delle equazioni del primo ordine, ne elenca i tipi integrabili, ne dà il teorema di esistenza e di unicità sotto le condizioni di LIPSCHITZ e col metodo delle approssimazioni successive del PICARD; considera poi l'equazione del primo ordine più generale, cioè non risoluta rispetto alla derivata, trattando delle soluzioni singolari e fermandosi opportunamente sul tipo CLAIRAUT. Non vi è naturalmente nulla di essenzialmente nuovo in questo Capitolo elementare: ma, nella sua concisione, contiene quanto vi è di più essenziale sull'argomento e non mancano opportuni esempi, come pure, alla chiusa del Capitolo, applicazioni geometriche e comportamento delle curve integrali in prossimità di un punto singolare.

Il secondo Capitolo tratta delle equazioni differenziali d'ordine superiore. Premesse alcune generalità e l'esame di alcuni tipi speciali, si ferma più a lungo sulle equazioni differenziali lineari, dandone il teorema di esistenza: considera le equazioni a coefficienti costanti, omogenee o no, ed altri casi speciali; tratta dell'integrazione per mezzo di serie e di integrali definiti, del comportamento degli integrali nei punti singolari ed accenna infine, forse troppo fugacemente, alla trasformazione di LAPLACE.

Il problema « al contorno » forma l'oggetto del terzo Capitolo, limitatamente al caso, del resto assai istruttivo, dell'equazione lineare del secondo ordine. Viene trattata brevemente, ma lucidamente, la questione delle radici degli integrali e della loro separazione; segue il problema al contorno nel senso di STURM-LIOUVILLE e la connessione coll'esistenza degli autovalori e delle autofunzioni; per ultimo viene considerata la funzione di GREEN, lo sviluppo in serie di FOURIER nel caso della periodicità, e la connessione coll'equazione integrale. Basta questa succinta analisi a mostrare come il libriccino, nell'esigua sua mole, contenga buona copia di importanti ed interessanti nozioni. (*u*)

W. ROGOSINSKI: *Fouriersche Reihen.* W. de Gruyter & C., Berlin-Leipzig, 1930, pagg. 135.

Come il precedente, anche questo manuale fa parte della « Sammlung Göschen ». Esso si propone di dare, nella tenue sua mole, una idea dello stato attuale della teoria delle serie di FOURIER, tanto interessante sia per le sue applicazioni alla Fisica, sia per la luce che getta su riposte proprietà delle funzioni. L'A. si è giovato della più recente letteratura sull'argomento, non esclusa l'opera magistrale del TONELLI pubblicata a Bologna nel 1928. Dopo ricordato, nel solito modo, l'origine della teoria dal problema delle corde vibranti, si danno le prime nozioni sulle serie trigonometriche per venire allo sviluppo di FOURIER di una funzione: si danno condizioni per la relativa sviluppabilità, per l'unicità, per l'integrabilità termine a termine. Questa prima parte (Cap. I e II) può bastare al fisico che si interessa sopratutto delle applicazioni; gli altri Capitoli trattano di questioni più delicate interessanti il matematico puro, come i criteri per la sviluppabilità e per l'unicità, le serie divergenti, il metodo di sommazione di FÉJER, il fenomeno di GIBBS, ecc..

Sono date varie applicazioni, e, sotto al titolo di « Uebungen », esercizi che valgono a completare la teoria. Può lamentarsi solo che, avendo l'A. per ragioni di brevità, evitata la nozione di integrale di LEBESGUE, alcuni enunciati non raggiungano tutta la desiderabile generalità: ma questo appunto non impedisce di riconoscere che, nel suo piccolo volume, il libriccino non riesca di incontestabile utilità. (*u*)

G. FUBINI e G. VIVANTI: *Esercizi di Analisi matematica. (Calcolo infinitesimale)* con speciale riguardo alle applicazioni, ad uso degli allievi delle R. Scuole d'Ingegneria. 2ª ediz., pp. XII+366. Società Tipografica Editrice Nazionale, Torino, 1930.

Questa raccolta di esercizi, ormai ben nota, compare nella sua seconda edizione notevolmente abbreviata: essa contiene circa 200 pagine in meno della prima edizione. Questo assottigliamento del libro, come dicono gli Autori nella prefazione, si è avuto e perchè sono stati soppressi gli esercizi le cui applicazioni a problemi pratici erano per un ingegnere di minore interesse, e perchè sono stati omessi gli esempi che richiedevano artifici riposti o alquanto lunghi di calcolo. Si deve aggiungere, poi, che per svariati esercizi vengono date dalle risoluzioni nuove e molto più semplici.

Ora quindi, ancora più di prima, il presente libro sarà di grande giovamento agli allievi dei corsi di matematica, di fisica e di ingegneria. *a. m.*

K. HAYASHI: *Tafeln des Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen.* Berlin, Springer, 1930, pagg. V+125.

Questo libro segue e completa un altro volume dello stesso Autore uscito qualche anno fa: *Sieben und Mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbel-funktionen.*

Tra le tavole contenute nella presente opera sono da rilevare in modo particolare quelle relative alle funzioni di BESSEL $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}_1$

e alle derivate successive (fino alla 9ª) della funzione $\mathfrak{I}_0$ i cui valori tra $x = 15{,}5$ e $x = 25{,}10$ sono stati calcolati dall'A. (mentre per valori più piccoli di x l'A. ha utilizzato le tavole del MEISSEL); le tavole degli integrali ellittici K e K' e del $\log q$; quelle della funzione Theta (ampliate anch'esse dall'A.) e delle funzioni sferiche (completamente calcolate da lui).

Non è necessario insistere nell'importanza e l'utilità di questo libro alla cui redazione il contributo di calcoli apportato dall'A. è veramente notevole ed al quale la casa Springer ha dato una veste tipografica elegante. Le opere di tavole numeriche sono sempre più necessarie per le scienze applicate; sicchè è augurabile per esse una rapida divulgazione. *g. s.*

K. HAYASHI: *Funfstellige Funktionentafeln.* Berlin, Springer, 1930, pagg. VIII+176.

Questo libro di tavole numeriche, è formato nella sua parte sostanziale con quelle già costruite dall'A. per due opere precedenti [1] ridotte quì, in generale, a cinque decimali, per ottenere un volume più maneggevole. Esso contiene le tavole delle funzioni circolari, e delle loro inverse, delle funzioni iperboliche ed esponenziale; i valori di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, e^{-x}, sono dati anche con 10 decimali per x variabile tra 0 e 0,01 (con intervallo di 0,0001) e per x variabile da 10 a 40 (con intervallo uno). Seguono tavole per il calcolo di x, nota che sia Ampl. x, per la trasformazione dell'arco nell'angolo e viceversa; tavole per i valori di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\frac{\operatorname{senh} x}{x}$,... e per i prodotti $\operatorname{senh} x$, $\cos x$, $\cosh x$, $\cos x$, ecc..

Vi sono poi calcolati i valori di funzioni di BESSEL, funzioni sferiche, funzioni ellittiche e della funzione Γ; e tavole per l'integrale degli errori, per i coefficienti binomiali, per i numeri di BERNOULLI.

Alcune di queste tavole sono state calcolate completamente dall'A. per la redazione dei libri già ricordati.

Il presente volume si presenta in veste tipografica elegante ed è facilmente maneggevolc; la sua pubblicazione è molto utile, in quanto rende accessibili al pubblico le importanti tavole numeriche costruite dall'A. *g. s.*

[1] Vedasi: *Sieben und mehrstellige Tafeln der Kreis und Hyperbel Funktionen*, Berlino, Springer, 1926; e *Tafeln der Besselschen, Tetha, Kugel und anderer Funktionen*, Berlino, Springer, 1930.