Bollettino Unione Matematica Italiana

Enea Bortolotti

Connessioni proiettive

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 288–294.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_288_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Connessioni proiettive (¹).

I. La " geometria proiettiva dei cammini ".

1. Fra le teorie geometriche sorte in questi ultimi anni presenta un particolare interesse quella che viene chiamata, secondo E. CARTAN, *geometria delle varietà a connessione proiettiva*. Sotto quest'unica denominazione possiamo raggruppare le recenti ricerche svolte da varî Autori, con metodi e vedute talora assai disparati, allo scopo comune di costruire, in uno spazio curvo, una geometria proiettiva *autonoma*, che prescinda dalla considerazione di uno spazio proiettivo ambiente. Qualche cosa di analogo, nel campo proiettivo, a ciò che è la geometria delle varietà metriche secondo RIEMANN, o in particolare, la geometria metrica delle superficie nel gruppo delle flessioni secondo GAUSS. Le sopra accennate ricerche hanno ormai condotto, attraverso a una elaborazione particolarmente faticosa — la novità della materia trattata richiedeva anche la costruzione di nuovi mezzi d'indagine — a sistemare in modo abbastanza soddisfacente almeno le basi della nuova teoria: certo suscettibile di ulteriori perfezionamenti e sviluppi. Sarà dunque opportuno il volgerci a dare un rapido sguardo riassuntivo a quanto finora s'è conseguito in questo indirizzo (²).

(¹) Da una comunicazione fatta alla XVIII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (Firenze, 24 Settembre 1929). Negli Atti della Società non vi è che un brevissimo sommario (1929, vol. II, pp. 46-47).

(²) Trattandosi di lavori fra noi ben poco noti, e in gran parte pubblicati all'estero, credo indispensabile il corredare questa Relazione con un elenco bibliografico (limitato ai lavori che più direttamente si riferiscono agli argomenti qui considerati); al quale si riferiranno, nel seguito, le citazioni:

1. R. KÖNIG: *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre.* « Jahresb. Deut. Math. Verein. », 28, 1919, 213-228. — **2.** H. WEYL: *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen*

2. Le prime basi per la nuova teoria sono sorte, ad opera di H. WEYL (2, 1921) da un problema relativo alle *varietà a connessione affine*. È noto che data in una X_n (continuo n–dimensionale)

Auffassung. « Göttinger Nachrichten », 1921, 99-112. — **3.** L. P. EISENHART: *Spaces with corresponding paths*. « Proceedings Nat. Acad. of Sc. », 8, 1922, 233-238. — **4.** O. VEBLEN: *Projective and affine geometry of paths*. Ibid., 347-350. — **5.** H. WEYL: *Mathematische Analyse des Raumproblems*. Berlin, Springer, 1923. — **6.** O. VEBLEN e T. Y. THOMAS: *The geometry of paths*. « Transactions Amer. Mathem. Society », 25, 1923, 551-608. — **7.** É. CARTAN: *Sur les variétés à connexion projective*. « Bulletin Soc. Mathém. », 52, 1924, 205-241. — **8.** É. CARTAN: *Sur la connexion projective des surfaces*. « Comptes Rendus de l'Acad. », 178, 1924, 750-752. — **9.** J. A. SCHOUTEN: *Der Ricci-Kalkül*. Berlin, Springer, 1924. — **10.** J. A. SCHOUTEN: *On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements*. « Proceedings Kon. Akad. Amsterdam », 27, 1924, 407-424. — **11.** J. A. SCHOUTEN: *Sur les connexions conformes et projectives de M. Cartan et la connexion linéaire générale de M. König*. « Comptes Rendus de l'Acad. », 178, 1924, 2044-2046. — **12.** V. HLAVATY: *Sur le déplacement linéaire du point*. « Vestníku Kral. Ces. Spolec. Nauk. », II, 1924. — **13.** É. CARTAN: *Les récentes généralisations de la notion d'espace*. « Bulletin des Sciences Mathém. », 48, 1924, 294-320. — **14.** O. VEBLEN: *Remarks on the foundations of geometry*. « Bull. Amer. Mathem. Society », 31, 1925, 121-141. — **15.** T. Y. THOMAS: *Note on the projective geometry of paths*. Ibid., 318-322. — **16.** T. Y. THOMAS: *On the projective and equi-projective geometry of paths*. « Proceed. Nat. Acad. », 11, 1925, 199-203. — **17.** O. VEBLEN e J. M. THOMAS: *Projective normal coördinates for the geometry of paths*. Ibid., 204-207. — **18.** J. M. THOMAS: *Note on the projective geometry of paths*. Ibid., 207-209. — **19.** T. Y. THOMAS: *Announcement of a projective theory of affinely connected manifolds*. Ibid., 588-589. — **20.** J. A. SCHOUTEN: *Projective and conformal invariants of half-symmetrical connexions*. « Proceedings Kon. Akad. Amsterdam », 28, 1925, 334-336. — **21.** J. A. SCHOUTEN: *On the conditions of integrability of covariant differential equations*. « Trans. Amer. Math. Society », 27, 1925, 441-473. — **22.** J. M. THOMAS: *On normal coördinates in the geometry of paths*. « Proceed. Nat. Acad. », 12, 1926, 58-63. — **23.** O. VEBLEN e J. M. THOMAS: *Projective invariants of affine geometry of paths*. « Annals of Mathem. », (2), 27, 1926, 279-296. — **24.** T. Y. THOMAS: *A projective theory of affinely connected manifolds*. « Mathem. Zeitschrift », 25, 1926, 723-733. — **25.** J. M. THOMAS: *Asymmetric displacement of a vector*. « Trans. Amer. Mathem. Society », 28, 1926, 658-670. — **26.** J. A. SCHOUTEN: *Erlanger Programm und Uebertragungslehre: neue Gesichtpunkte zur Grundlegung der Geometrie* (da una conferenza al Congresso di Innsbruck, 1924). « Rendic. Circolo Matem. Palermo », 50, 1926, 142-169. — **27.** E. BOMPIANI: *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà*. « Rendic. Accad. Lincei », (6), 5, 1927, 383-389. — **28.** E. BORTOLOTTI: *Sistemi assiali e connessioni nelle V_n*. Ibid., 390-395. — **29.** M. S. KNEBELMAN: *Groups of collineations in a space of paths*.

una connessione affine ([3]), ossia una legge di trasporto affine dei vettori (e quindi anche delle direzioni) della varietà da un punto a uno infinitamente vicino, risulta determinato un sistema di linee tali che lungo ciascuna di esse la direzione della tangente si sposta parallelamente a sè stessa, cioè secondo la legge di trasporto asse-

« Proceed. Nat. Acad. », 13, 1927, 396-400. — **30.** T. Y. THOMAS: *The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths.* « Annals of Mathem. », (2), 28, 1927, 549-561. — **31.** L. P. EISENHART: *Non-riemannian Geometry.* « Amer. Mathem. Soc. Colloquium Public. », VIII, New-York, 1927. — **32.** M. H. A. NEWMAN: *A gauge-invariant tensor calculus.* « Proceed. Royal Society », London, A., 116, 1927, 603-623. — **33.** V. HLAVATY: *Sur les déplacements isohodoïques.* « L'Einsegn. Mathém. », 26, 1927, 84-97. — **34.** V. HLAVATY: *Espaces projectifs courbes* (non pubblicato finora, letto al Congresso Nazionale Matematico Polacco, Leopoli 1927). — **35.** V. HLAVATY: *Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas: A projective theory of affinely connected manifolds.* « Mathem. Zeitschrift », 28, 1928, 142-146. — **36.** O. VEBLEN: *Projective tensors and connections.* « Proceed. Nat. Acad. », 14, 1928, 154-166. — **37.** H. P. ROBERTSON: *Note on projective coördinates.* Ibid., 153-154. — **38.** O. VEBLEN: *Differential Invariants and Geometry.* « Atti Congresso Internazionale », Bologna, 1928, I, 181-189. — **39.** V. HLAVATY: *La théorie générale de la connexion linéaire.* (Comun. al Congresso di Bologna, 1928, non ancora pubblicato). — **40.** J. A. SCHOUTEN e V. HLAVATY: *Zur Theorie der allgemeinen linearen Uebertragung.* « Mathem. Zeitschrift », 30, 1929, 414-432. — **41.** O. VEBLEN: *Generalized Projective Geometry.* « Journal London Mathem. Society », 4. 1929, 140-160. — **42.** H. P. ROBERTSON e H. WEYL: *On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry.* « Bull. Amer. Mathem. Society », 35, 1929, 686-690. — **43.** H. WEYL: *On the foundations of general infinitesimal geometry.* Ibid., 716-725. — **44.** O. VEBLEN: *A generalisation of the quadratic differential form.* « Quarterly Journ. of Mathem. », Oxford Series, I, 1930, 60-76. — **45.** E. BORTOLOTTI: *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo.* « Annali di Matem. », (4), 8, 1930-31, 53-101. — **46.** J. A. SCHOUTEN e ST. GOLAB: *Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen.* « Mathem. Zeitschrift », 32, 1930, 192-214, e (II) « Annali di Matem. », (4), 8, 1930-31, 141-157. — **47.** O. VEBLEN e B. HOFFMANN: *Projective Relativity* « Physical Review », 36, 1930, 810-822. — **48.** J. H. C. WHITEHEAD: *On a class of projectively flat affine spaces.* — **49.** J. H. C. WHITEHEAD: *The representation of projective spaces on affine spaces.* « Proceedings London Math. Soc. ». — **50.** E. BORTOLOTTI: *Differential invariants of direction- and point displacements.* « Annals of Mathem. ». — **51.** E. BORTOLOTTI: *Sulle connessioni proiettive.*

([3]) Rimando, per quanto riguarda le connessioni affini, ai citati libri di SCHOUTEN (**9**) e di EISENHART (**31**), e al « Cambridge Tract » *Invariants of quadratic differential forms* di VEBLEN (1927).

gnata: le autoparallele, o geodetiche della connessione. Anche l'ordinario *spazio affine* ha, ovviamente, una connessione affine nel senso ora detto, e le sue geodetiche sono le *linee rette*. Ora: nella geometria affine ordinaria le proprietà proiettive sono appunto quelle che possono farsi dipendere dalla nozione di allineamento di tre punti, o di linea retta; su di una varietà a connessione affine sarà naturale chiamare (col WEYL) *proprietà proiettive* quelle che possono farsi dipendere dalla nozione di *linee geodetiche* della connessione, cioè, le proprietà invarianti per le trasformazioni della connessione che ne conservano le geodetiche (*trasformazioni geodetiche*, o, secondo le vedute ora espresse, *proiettive*). Siano Γ^r_{pq} $(p, q, r, s, t, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ i *parametri* della connessione in un sistema di coordinate curvilinee u^r, cioè, siano $\xi^r + d\xi^r$, ove

$$d\xi^r + \Gamma^r_{pq}\xi^p du^q = 0, \tag{1}$$

le componenti del vettore che nel punto $u^r + du^r$ è *equipollente* al vettore ξ^r applicato nel punto u^r, cioè, suo omologo per la legge di trasporto che definisce la connessione. Il WEYL ha trovato (riferendosi al caso di una connessione *simmetrica*, o senza torsione: tale cioè che $2S_{pq}^{\cdot\cdot r} = \Gamma^r_{pq} - \Gamma^r_{qp} = 0$) che la più generale trasformazione proiettiva della supposta connessione affine si rappresenta ponendo

$$\overline{\Gamma}^r_{st} = \Gamma^r_{st} + \delta^r_s\psi_t + \delta^r_t\psi_s, \qquad \delta^r_s = \begin{cases} 0 \text{ se } r \neq s \\ 1 \text{ se } r = s \end{cases} \tag{2}$$

$\psi_r =$ vett. covar. arbitrario [4].

Le proprietà «proiettive» saranno tutte e sole le proprietà invarianti per le (2). In particolare, proponendosi la ricerca delle varietà *proiettivamente piane*, cioè, che ammettono rappresentazioni proiettive (geodetiche) su spazi affini [5] il WEYL ha trovato (2) due importanti tensori, che indicheremo con $W_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s}$ e V_{rst} [6]; il primo

[4] Ved. **2**, p. 102; **3**, p. 234; **9**, p. 129; e pel caso generale $\left(S_{pq}^{\cdot\cdot r} \neq 0\right)$ **9**, p. 76; **31**, p. 31 e **33**.

[5] Questa è una generalizzazione del noto *problema del* BELTRAMI.

[6] $W_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s} = R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s} + \dfrac{1}{n+1}\delta^s_r(R_{pq} - R_{qp}) + \dfrac{1}{n^2-1}\left[\delta^s_q(nR_{pr} + R_{rp}) - \right.$ $\left. - \delta^s_p(nR_{qr} + R_{rq})\right]$, ove $R_{pq} = R_{spq}^{\cdot\cdot\cdot s}$ ed $R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s}$ è il *tensore di curvatura* della supposta connessione affine $\left(R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s} = \dfrac{\partial}{\partial u^q}\Gamma^s_{rp} - \dfrac{\partial}{\partial u^p}\Gamma^s_{rq} + \Gamma^t_{rp}\Gamma^s_{tq} - \Gamma^t_{rq}\Gamma^s_{tp}\right)$; $V_{pqr} = \nabla_q(nR_{pr} + R_{rp}) - \nabla_p(nR_{qr} + R_{rq})$. Intendiamo sempre che sia nullo il tensore di torsione $S_{pq}^{\cdot\cdot r} = \dfrac{1}{2}\left(\Gamma^r_{pq} - \Gamma^r_{qp}\right)$ della connessione.

dei quali (*tensore di curvatura proiettiva*, o di WEYL) è in ogni caso invariante per le trasformazioni proiettive della connessione, per $n=2$ è identicamente nullo e per $n>2$ il suo annullarsi è la condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà sia proiettivamente piana; mentre per $n=2$ tale condizione è espressa dall'annullarsi di V_{rst}, tensore che *soltanto per* $n=2$ è invariante nelle trasformazioni proiettive della connessione.

3. Alle stesse vedute del WEYL, per quanto originate in modo indipendente e un pò diverso, si ispirano le ricerche svolte fra il 1922 e il 1927 dalla Scuola di Princeton (EISENHART, VEBLEN e loro allievi e collaboratori) sulla « projective geometry of paths ». Secondo EISENHART e VEBLEN vien posta a base di una geometria in una varietà curva la nozione di « paths » (*cammini*), intendendosi con questo nome un sistema di linee tali che, entro una regione convenientemente limitata della varietà, per ciascun punto e in ciascuna direzione esca *una* linea del sistema, ed esista pure *una* linea del sistema congiungente due punti sufficientemente vicini. Lo studio della « geometry of paths » è stato iniziato dal caso in cui queste linee sono rappresentate da un sistema di equazioni della forma

$$\frac{d^2u^r}{dt^2}+\Gamma^r_{pq}\frac{du^p}{dt}\frac{du^q}{dt}=0. \tag{3}$$

cioè, sono le geodetiche di una connessione affine. Se nelle (3) si suppongono assegnate le Γ^r_{pq} (onde resta fissata, su ciascuna linea integrale, anche la *parametrizzazione*, col parametro t) la corrispondente geometria dei cammini è lo studio della connessione affine di parametri Γ^r_{pq}: mentre le proprietà indipendenti dalla scelta del parametro t, cioè, dipendenti *soltanto dal sistema di linee integrali* delle (3), sono le proprietà *proiettive* della connessione; il loro studio è la « projective geometry of paths » (7).

Accenniamo ai più significativi risultati raggiunti nel detto periodo (1922-27) dalla Scuola americana (8). Nel 1925 T. Y. THOMAS ha osservato (**15**) che per le (2) sono invarianti le quantità

$$\Pi^r_{pq}=\Gamma^r_{pq}-\frac{1}{n+1}\left(\delta^r_p\Gamma^t_{tq}+\delta^r_q\Gamma^t_{tp}\right). \tag{4}$$

(7) Ved. **4**, **6**, **14**.

(8) Di questi si troverà un ampia e organica esposizione nel libro (**31**) di EISENHART, spec. pp. 87-136. Ved. **3**, **4**, **6**, **14**, **15**, **16**, **17**, **18**, **19**, **22**, **23**, **24**, **25**, **29**, **30**.

Mentre le Γ^r_{pq} per una trasformazione delle coordinate curvilinee variano secondo la legge

$$(5)\qquad \theta^r_i \Gamma'^i_{jk} = \Gamma^r_{pq}\theta^p_j\,\theta^q_k + \frac{\partial^2 u^r}{\partial u'^j \partial u'^k}, \qquad \left(\theta^r_i = \frac{\partial u^r}{\partial u'^i};\ i, j, h, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots, n\right)$$

e quindi sono le componenti di un tensore per le sole trasformazioni *lineari intere* delle coordinate, le Π^r_{pq} variano secondo la legge

$$(6)\qquad \theta^r_i \Pi'^i_{jk} = \Pi^r_{pq}\theta^p_j\,\theta^q_k + \frac{\partial^2 u^r}{\partial u'^j \partial u'^k} + \theta^r_j \frac{\partial\theta}{\partial u'^k} + \theta^r_k \frac{\partial\theta}{\partial u'^j},$$

$$\theta = -\frac{1}{n+1}\log\left|\frac{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)}{\partial(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n)}\right|,$$

onde segue che esse sono le componenti di un tensore per le trasformazioni *lineari fratte* delle u^r. Si ha $\Pi^r_{rp} = 0$. J. M. THOMAS ha mostrato (18) che per le Π^r_{pq} può esprimersi il tensore di WEYL, $W^{\cdot\cdot\cdot s}_{pqr}$; VEBLEN e J. M. THOMAS nel 1926 hanno costruito (23) una completa teoria degli invarianti proiettivi di una « geometry of paths », dimostrando che tutti questi invarianti possono costruirsi a partire dalle Π^r_{pq}, e precisamente, possono esprimersi pel tensore di WEYL, pel *covariante proiettivo* r_{pqs} (sistema multiplo pure costruibile a partire dalle Π^r_{pq}, e quindi, invariante per le (2); il quale per $n = 2$ coincide col tensore V_{pqs} prima accennato, mentre per $n > 2$ *non è un tensore* ([9])), e per le loro *derivate proiettive*, cioè, derivate costruite come le derivate covarianti in una geometria a connessione affine, ma sostituite le Π^r_{pq} alle Γ^r_{pq}. Naturalmente anche queste derivate *non sono tensori* nel senso usuale della parola, cioè *tensori affini*. Gli stessi AA. hanno anche stabilito l'esistenza di sistemi coordinati che corrispondono alle coordinate *riemanniane* nella geometria metrica, e alle coordinate *affini normali* di VEBLEN nella geometria affine: le *coordinate proiettive normali*, che data la connessione affine sono determinate da un supposto sistema di coordinate curvilinee sulla varietà e da un punto di questa (polo); e per una trasformazione delle coordinate curvilinee subiscono una corrispondente trasformazione *lineare fratta* (mentre la trasformazione è *lineare intera*, come è noto, per le coordinate riemanniane e affini normali).

4. Il fatto di avere a che fare, necessariamente, con sistemi che giuocano ruoli importanti e pure *non sono tensori* (affini), e

([9]) È $(n+1)r_{pqs} = V_{pqs} + (n-1)\Gamma^t_{tr} W^{\cdot\cdot\cdot r}_{pqs}$.

con enti che variano per trasformazioni lineari *fratte*, faceva già sentire come la nuova teoria si muovesse a disagio nei quadri della geometria delle varietà a connessione affine; e apparire l'opportunità di una più razionale sistemazione. Questa crisi, per così dire, della « projective geometry of paths «, trova una brillante risoluzione ad opera di T. Y. THOMAS, che in un lavoro del 1926 (**24** ([10])) mostra come tale geometria per una X_n possa ridursi a una geometria a connessione affine (in relazione a un particolare gruppo di trasformazioni sulle coordinate) in una X_{n+1}. L'A. introduce, insieme alle u^r, un $(n+1)^{mo}$ parametro u^o, che per una qualunque trasformazione sulle u^r varia secondo la legge $u^o = u'^o + \log \Delta\left(\Delta = \left|\dfrac{\partial(u^1, u^2,..., u^n)}{\partial(u'^1, u'^2,..., u'^n)}\right|\right)$: e chiama *tensori proiettivi* i sistemi di funzioni delle u^r $(r = 1, 2,..., n)$ a indici α, β, γ,... *variabili da* 0 *ad* n, i quali si comportino come tensori pel gruppo G: $\{u^r = u^r(u'^1, u'^2,..., u'^n),\ u^o = u'^o + \log \Delta\}$. A partire dalle Π^r_{st} egli completa ([11]) un sistema $^*\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ che pel gruppo G si trasforma proprio come il sistema dei parametri di una connessione affine in una varietà $(n+1)$-dimensionale (secondo le (5), mutati gli indici latini in indici greci). Con l'uso di questa connessione affine $^*\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ e della nozione di *tensori proiettivi* tutta la teoria acquista una notevole semplicità; le altre grandezze non tensoriali che si erano presentate nelle precedenti ricerche si riducono (aggiunte alcune componenti) a tensori proiettivi. Tale è naturalmente il *tensore di curvatura* $^*R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$, costruito per le $^*\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ come $R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s}$ per le Γ^r_{pq}; il quale congloba il tensore di WEYL e il covariante proiettivo ([12]). Vedremo come i risultati di T. Y. THOMAS si connettano assai da vicino con anteriori risultati di CARTAN e di SCHOUTEN, raggiunti per tutt'altra via, e quindi costituiscano un collegamento della « geometria proiettiva dei cammini », secondo la Scuola americana, con la vera e propria teoria delle connessioni proiettive secondo il CARTAN, di cui ora verremo a parlare. *(continua)*

ENEA BORTOLOTTI

([10]) Ved. anche **19**, **30**, **31**, pp. **103-104**; **35**.

([11]) ponendo

$$^*\Gamma^r_{st} = \Pi^r_{st}\,; \quad ^*\Gamma^r_{so} = {}^*\Gamma^r_{os} = -\frac{\delta^r_s}{n+1}\,; \quad ^*\Gamma^o_{st} = {}^*\Gamma^o_{ts} = \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{\partial \Pi^p_{st}}{\partial u^p} - \Pi^p_{qs}\Pi^q_{pt}\right).$$

([12]) Le componenti di questi sono precisamente le $^*R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s}$ e $\dfrac{n-1}{n+1}\,{}^*R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot o}$; onde segue che l'annullarsi di $^*R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà sia *proiettivamente piana*.