
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

P. CATTANEO

Su una classe di superficie W

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **9** (1930), n.5, p. 280–286.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_280_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_280_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su una classe di superficie W .

Nota di PAOLO CATTANEO (a Padova).

Sunto. - *L'A. dimostra vari teoremi sulle superficie che hanno costante il rapporto fra i raggi principali di curvatura e che, se la loro curvatura totale è negativa, hanno quindi costante l'angolo formato dalle linee asintotiche.*

1. Le superficie che prendiamo in considerazione sono quelle sulle quali è costante il rapporto $r_2:r_1$ fra i raggi principali di curvatura. Se tale rapporto è 1, 0 o ∞ si hanno i casi particolari della sfera e delle superficie sviluppabili, che senz'altro escludiamo; si hanno le superficie minime, se detto rapporto è -1 .

Se la curvatura totale K è negativa, la costanza del rapporto $h = r_2:r_1$ equivale alla costanza dell'angolo α formato dalle linee

asintotiche. Infatti, prendendole come linee coordinate ed usando le notazioni del BIANCHI, si ha:

$$\begin{aligned} D = D'' = 0, \quad F &= \sqrt{EG} \cdot \cos \alpha; \\ K &= \frac{-D'^2}{EG \cdot \sin^2 \alpha}, \quad H = \frac{2 \cos \alpha \cdot D'}{\sqrt{EG} \cdot \sin^2 \alpha}; \\ \frac{D'^2}{EG} &= -K \cdot \sin^2 \alpha = \frac{H^2 \cdot \sin^4 \alpha}{4 \cos^2 \alpha}, \quad H^2 \sin^2 \alpha = -4K \cdot \cos^2 \alpha; \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= -\frac{4K}{H^2} = \frac{-4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{-4h}{(1+h)^2}; \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

Per l'osservazione ora fatta, le superficie di cui ci occupiamo saranno da noi dette *superficie* W_a . Le superficie minime corrispondono al caso particolare $\alpha = 90^\circ$.

2. Da un ben noto teorema sulle superficie W si ha che, riferendole alle linee di curvatura, esiste una funzione λ di u e v ed una funzione $\varphi(\lambda)$ tali che

$$ds^2 = \frac{du^2}{\lambda^2} + \frac{dv^2}{\varphi'^2}, \quad \frac{1}{r_2} = \varphi, \quad \frac{1}{r_1} = \varphi - \lambda \cdot \varphi'.$$

Nel caso particolare di una superficie W_a si ha

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 - \lambda \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} = h,$$

donde $\varphi = a \cdot \lambda^{1-h}$, con a costante arbitraria che, scelto opportunamente il parametro v , si può porre $= \frac{1}{1-h}$.

Abbiamo allora, ovviamente,

$$\begin{aligned} (1) \quad ds^2 &= E \cdot du^2 + E^{-h} \cdot dv^2; \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{1-h} \cdot E^{\frac{h-1}{2}}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{h}{1-h} \cdot E^{\frac{h-1}{2}}; \\ (2) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= \frac{h}{(1-h)^2} \cdot E^{h-1}, \quad H = \frac{h+1}{1-h} \cdot E^{\frac{h-1}{2}}; \\ D &= -\frac{E}{r_2} = \frac{1}{h-1} \cdot E^{\frac{h+1}{2}}, \quad D'' = -\frac{G}{r_1} = \frac{h}{h-1} \cdot E^{-\frac{h+1}{2}}; \\ e &= \frac{1}{(1-h)^2} \cdot E^h, \quad g = \frac{h^2}{(1-h)^2} \cdot \frac{1}{E}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Calcolando la curvatura della forma (1), dalla prima delle (2)

si vede tosto che la funzione E deve essere soluzione dell'equazione

$$(3) \quad h(1-h)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[E^{-\frac{h+3}{2}} \cdot \frac{\partial E}{\partial u} \right] - (1-h)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[E^{\frac{h-1}{2}} \cdot \frac{\partial E}{\partial v} \right] = 2h \cdot E^{\frac{h-1}{2}}.$$

Per le superficie minime si ha la ben nota equazione

$$(3') \quad \frac{\partial^2 \lg E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lg E}{\partial v^2} = \frac{1}{2E}.$$

Dalla prima delle (2) si vede inoltre che *non esistono superficie* W_a (non sviluppabili) *a curvatura* K *costante*: infatti, assieme a K , dovrebbe essere costante anche E . Dalla seconda delle (2) si vede invece che, *escluse le superficie minime, non esistono superficie* W_a *sulle quali sia costante* H .

3. Perchè su una superficie W_a le linee di curvatura formino un sistema isotermo è necessario e basta che, indicando rispettivamente con U_0 e con V_0 due funzioni della sola u e della sola v , sia $E: G = E^{1+h} = U_0 \cdot V_0$; cioè che sia $h = -1$ e quindi si tratti di una superficie minima, oppure che sia $E = U \cdot V$, dove U e V sono, rispettivamente, funzioni soltanto di u e di v .

In tal caso, dalla (3), si ha tosto

$$h(1-h)^2 U^{-\frac{h+1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[U^{-\frac{h+3}{2}} \cdot U' \right] - (1-h)^2 \cdot V^{\frac{h+1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[V^{\frac{h-1}{2}} \cdot V' \right] = 2h \frac{V^h}{U}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial u \cdot \partial v} \left(\frac{V^h}{U} \right) = -h \frac{V^{h-1}}{U^2} \cdot U' \cdot V' = 0,$$

ossia $U' = 0$ o $V' = 0$, U o V costante. Il ds^2 può dunque porsi sotto la forma $du^2 + \varphi^2(u) \cdot dv^2$ (scambiando u con v , se è costante U) e si conclude ⁽¹⁾ che la superficie W_a considerata è di rotazione.

(1) Per convincersi che una superficie S è di rotazione se, riferendoci alla linee di curvatura, si ha $ds^2 = du^2 + \varphi^2 u \cdot dv^2$, giova osservare che le equazioni di GAUSS e di CODAZZI diventano in tal caso

$$DD' = -\varphi\varphi'', \quad \frac{\partial D}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D''}{\varphi} \right) = \varphi' \Delta;$$

donde ovviamente si trova

$$D = -\varphi'' : \sqrt{c^2 - \varphi'^2}, \quad D'' = \varphi \cdot \sqrt{c^2 - \varphi'^2}, \\ r_1 = -\varphi : \sqrt{c^2 - \varphi'^2}, \quad r_2 = \sqrt{c^2 - \varphi'^2} : \varphi'',$$

con c costante arbitraria.

Si deduce di qui che sulla falda $x_1 = x - r_1 X$, $y_1 = y - r_1 Y$, $z_1 = z - r_1 Z$

Una superficie W_a è insomma isotermica solo quando è minima o di rotazione.

4. È naturale ora chiedersi quali sono le superficie W_a di rotazione.

L'unica superficie minima di rotazione è, notoriamente, il catenoide.

In generale, qualunque sia h , le corrispondenti superficie W_a di rotazione sono quelle le cui curve meridiane hanno per equazione

$$z = \int \frac{a \cdot dv}{\sqrt{v^{-2h} - a^2}}, \text{ dove } a \text{ è una costante arbitraria.}$$

Siano infatti $x = v \cdot \cos u$, $y = v \cdot \sin u$, $z = z(v)$ le equazioni di una superficie W_a di rotazione.

Si ha

$$\begin{aligned} E &= v^2, & F &= 0, & G &= 1 + \varphi'^2; \\ D &= \frac{v\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}, & D' &= 0, & D'' &= \frac{\varphi''}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}; \\ h &= \frac{r_2}{r_1} = \frac{ED''}{GD} = \frac{v\varphi''}{\varphi' \cdot (1 + \varphi'^2)}. \end{aligned}$$

Basta ora risolvere l'equazione $v\varphi'' = h\varphi'(1 + \varphi'^2)$ che ha per soluzione $\varphi = \int \frac{a \cdot dv}{\sqrt{v^{-h^2} - a^2}}$, c. d. d..

5. Le superficie ora considerate sono le sole superficie W_a aventi un sistema di linee di curvatura geodetiche (quindi piane).

Infatti dalla (1) si ha che le curvature geodetiche delle linee di curvatura di una superficie W_a sono

$$\frac{1}{\rho_u} = -E^{\frac{h-1}{2}} \cdot \frac{\partial E^{-\frac{h}{2}}}{\partial u} \quad \text{ed} \quad \frac{1}{\rho_v} = -E^{\frac{h-1}{2}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v};$$

dell'evoluta di S abbiamo $F_1 = G_1 = D_1 = D_1' = D_1'' = 0$ e quindi X_1, Y_1, Z_1 costanti. Detta falda riducesi quindi ad una retta, che possiamo assumere come asse delle z .

Abbiamo allora $x_1 = y_1 = 0$ e, per le formule di RODRIGUES,

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} - r_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

cioè z funzione $\psi(u)$ della sola u . La superficie S è insomma involuppo delle sfere di centro $(0, 0, \psi(u))$ e di raggio $r_1(u)$; quindi è di rotazione, c. d. d.

uno dei due sistemi di linee di curvatura consta dunque di geodetiche solo quando E è funzione di un solo parametro, nel qual caso il ds^2 può ridursi avviamente al tipo $du^2 + \varphi^2(u) \cdot dv^2$, c. d. d.

6. Quali sono, più in generale, le superficie W_a con un sistema di linee di curvatura piane?

Ciò accadè se le corrispondenti immagini sferiche sono cerchi, ossia linee a curvatura geodetica costante.

Dalle (2) si ha

$$ds'^2 = \left(E^h \cdot du^2 + \frac{h^2}{E} \cdot dv^2 \right) : (1 - h^2).$$

Le curvature geodetiche delle immagini sferiche delle linee di curvatura sono

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_u'} &= \frac{-1}{\sqrt{eg}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \frac{-1}{2\sqrt{e}} \cdot \frac{\partial \lg g}{\partial u} = \pm \frac{1-h}{1-h^2} \cdot E^{-\frac{h}{2}} \cdot \frac{\partial \lg E}{\partial u} = \pm \frac{1-h}{h} \cdot \frac{\partial E^{-\frac{h}{2}}}{\partial u}, \\ \frac{1}{\varrho_v'} &= \frac{-1}{\sqrt{eg}} \cdot \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = \frac{-1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \lg e}{\partial v} = \pm \frac{1-h}{2h} \cdot \sqrt{E} \cdot h \cdot \frac{\partial \lg E}{\partial v} = \pm (1-h) \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

La S ha piane le linee di curvatura $u = \text{cost.}$, quando $\frac{1}{\varrho_u'}$ è funzione della sola u , ossia quando $E = (U + V)^{-\frac{2}{h}}$; nel qual caso si ha $ds^2 = (U + V)^{\frac{-2}{h}} \cdot du^2 + (U + V)^2 \cdot dv^2$.

Sono invece piane le linee $v = \text{cost.}$, quando $E = (U + V)^2$ e $ds^2 = (U + V)^2 \cdot du^2 + (U + V)^{-2h} \cdot dv^2$.

Per le superficie minime ($h = -1$) si ha, in ambo i casi, $ds^2 = (U + V)^2 \cdot (du^2 + dv^2)$; e risulta dimostrato il noto teorema che, se una superficie minima ha un sistema di linee di curvatura piane, le linee di curvatura dell'altro sistema sono esse pure piane.

7. Sia S una superficie W_a riferita alle asintotiche. Posto $\alpha = \sqrt{E}$ e $\beta = \sqrt{G}$ si ha $F = \alpha\beta \cdot \cos \varpi$, con ϖ costante; inoltre si ha $D = D'' = 0$, e, scegliendo in modo opportuno i versi positivi delle linee coordinate, $D' = \alpha\beta \cdot \sin \varpi \cdot \sqrt{-K}$.

Abbiamo poi

$$(4) \quad K = \frac{\cos \varpi}{\alpha\beta \cdot \sin^2 \varpi} \cdot \frac{\partial^2 \lg(\alpha\beta)}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{1}{\alpha\beta \cdot \sin^2 \varpi} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) \right\},$$

$$(5) \quad \frac{1}{\varrho_u} = \frac{1}{\alpha\beta \cdot \sin \varpi} \cdot \left\{ \cos \varpi \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\} \quad \text{ed} \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{1}{\alpha\beta \cdot \sin \varpi} \cdot \left\{ \cos \varpi \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right\},$$

e le formule di CODAZZI diventano

$$(6) \quad \frac{\partial \lg \sqrt{-K}}{\partial u} = 2 \frac{\cos \varpi \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}}{\beta \cdot \sin^2 \varpi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \lg \sqrt{-K}}{\partial v} = 2 \frac{\cos \varpi \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v}}{\alpha \cdot \sin^2 \varpi}.$$

8. Di qui è facile dedurre che l'*elicoide rigata*, non soltanto è l'unica rigata d'area minima (teorema di CATALAN), ma, più in generale, è l'unica superficie, non sviluppabile, che sia rigata e W_a .

Infatti, se S è rigata, con le generatrici $u = \text{cost.}$, si ha

$$\frac{1}{\rho_u} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \cos \varpi \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad \frac{\partial \lg \sqrt{-K}}{\partial u} = 0,$$

quindi K funzione della sola v ; inoltre si ha

$$\frac{\partial \lg \sqrt{-K}}{\partial v} = - \frac{\partial \lg \alpha^2}{\partial v},$$

quindi $\alpha^2 \cdot \sqrt{-K}$ funzione della sola u ed α del tipo $U \cdot V$. Scegliendo in modo opportuno il parametro u , abbiamo anzi $\alpha = V$ e quindi β del tipo $\cos \varpi \cdot V' \cdot u + V_1$.

Si ha allora

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{\partial \lg(\alpha \beta)}{\partial u} = \frac{\partial \lg \beta}{\partial u}, \quad \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{\cos \varpi} \cdot \frac{\partial \lg \beta}{\partial u}$$

e la (4) diventa

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{\alpha \beta \cdot \cos \varpi} \cdot \frac{\partial^2 \lg \beta}{\partial u \cdot \partial v} = \frac{-1}{\alpha \beta \cdot \cos \varpi} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\cos \varpi \cdot V'}{\cos \varpi \cdot V' \cdot u + V_1} \right) = \\ &= \frac{V' \cdot V_1' - V'' V_1}{V \cdot \beta^3}. \end{aligned}$$

Perchè sia K funzione della sola v deve essere tale anche β . quindi $V' = 0$, $K = 0$, S sviluppabile, oppure $\cos \varpi = 0$, $\varpi = 90^\circ$, S minima, c. d. d..

9. Per ogni superficie W le curvatures sulle due falde dell'*evoluta* sono

$$K_1 = \frac{-1}{(r_1 - r_2)^2} \cdot \frac{dr_2}{dr_1} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{-1}{(r_1 - r_2)^2} \cdot \frac{dr_1}{dr_2};$$

donde si ha

$$K_1 \cdot K_2 = \left(\frac{dr_2}{dr_1} \right)^2$$

e si vede che K_1 è proporzionale a K_2 solo quando $r_2 = hr_1 + k$, con h e k costanti arbitrarie (in particolare sulle superficie W_a).

Essendo $K_1 = h^2 K_2$, si ha $K_1 = K_2$ solo quando $h = \pm 1$, ossia quando $r_2 \pm r_1$ è costante.

Sulle superficie W_a si ha $k = 0$,

$$K = \frac{1}{h \cdot r_1^2}, \quad K_1 = \frac{-h}{(1-h)^2 \cdot r_1^2} = -\frac{h^2 K}{(1-h)^2}, \quad K_2 = -\frac{K}{(1-h)^2}.$$

Sulle superficie minime si ha $K_1 = K_2 = -\frac{K}{4}$.

10. Terminiamo osservando che gli elementi lineari delle due falde dell'evoluta di una superficie W_a sono dati dalle formole

$$ds_1^2 = dr_1^2 + r_1^{\frac{2}{1-h}} \cdot du^2 \quad \text{e} \quad ds_2^2 = dr_2^2 + r_2^{\frac{-2h}{1-h}} \cdot dv^2.$$

Le superficie di rotazione applicabili sulle falde delle evolute delle superficie W_a sono dunque tali che, riferite alle loro linee di curvatura, hanno

$$(7) \quad ds^2 = dr^2 + r^c \cdot d\omega^2,$$

con c costante, diversa da 2.

Viceversa, ogni deformata di una tale superficie di rotazione può considerarsi come una falda dell'evoluta di una superficie W_a . Su detta superficie si ha

$$\frac{2}{1-h} = c, \quad h = \frac{c-2}{c}, \quad r_2 = \frac{c-2}{c} \cdot r_1.$$

Sulla superficie complementare della deformata considerata, ossia sulla seconda falda dell'evoluta della superficie W_a , si ha

$$(7') \quad ds_0^2 = dr_0^2 + r_0^{2-c} \cdot d\omega_0^2.$$