Antonio Colucci

# Un teorema sulle serie di funzioni

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **9** (1930), n.5, p. 278–280.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_278_0>

# Un teorema sulle serie di funzioni.

Nota di ANTONIO COLUCCI (a Napoli).

**Sunto.** - *L'A. arreca un complemento, che ritiene utile, ad un teorema sulle serie di funzioni dato recentemente dal sig.* N. OBRECHKOFF.

**1.** Il sig. N. OBRECHKOFF in una Nota inserita nei « Comptes rendus » [1] ha dimostrato il seguente notevole teorema:

« *Soient* $f_n(x)$ *des fonctions réelles qui admettent dans l'intervalle* (a, b) *des dérivées d'ordre* k, *qui toutes sont monotones dans un sens. Supposons que la série*

$$(1) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

*converge en* $k+1$ *points* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *de l'intervalle* $(a, a+\delta)$ *et en* $k+1$ *autres points* $y_0, y_1, \ldots, y_k$ *de l'intervalle* $(b-\delta_1, b)$. *Alors la série*

$$(2) \qquad f_1^{(k)}(x) + f_2^{(k)}(x) + \ldots + f_n^{(k)}(x) + \ldots$$

*converge uniformément dans* $(a+\delta, b-\delta_1)$ ».

È chiaro che questo teorema, così com'è dato, nulla può dirci circa la natura delle serie i cui termini sono le derivate $(k-1)^{me}$, $(k-2)^{me}$,... dei termini della serie iniziale.

[1] N. OBRECHKOFF, *Sur les séries de fonctions*. « Comptes rendus », t. 191, n.° 8 (1930), pp. 373-75.

Esso lascia, per es., insoluta la questione — che al Lettore si presenta del tutto spontaneamente — di sapere quando è che *tutte* le serie

$$(3) \qquad f_1^{(r)}(x) + f_2^{(r)}(x) + \dots + f_n^{(r)} + \dots \qquad (r = 1, 2, \dots, k)$$

risultano convergenti in $(a + \delta, b - \delta_1)$.

Se, nelle condizioni del teorema precedente, le $f_n^{(r)}(x)$ si suppongono non negative o (indifferentemente) non positive in $(a, b)$, allora le serie (3) convergono uniformemente in $(a + \delta, b - \delta_1)$. Ma ciò è immediato e non costituisce un fatto degno di rilievo.

Interessante sembra invece, in tale ordine di idee, il teorema:

*Se la serie* (1) *converge in* $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ *punti dell'intervallo* $(a, a + \delta)$ *ed in altrettanti punti dell'intervallo* $(b - \delta_1, b)$, *e se le* $f_n^{(k)}(x)$ *sono non decrescenti (non crescenti) in* $(a, b)$, *la serie* (1) *e le serie* (3) *risultano uniformemente convergenti in tutto* $(a + \delta, b - \delta_1)$.

DIM. — Poniamo per semplicità di scrittura $l = \frac{k(k+1)}{2}$, ed indichiamo con

$$x_0 < x_1 < \dots < x_l, \qquad y_0 > y_1 > \dots > y_l,$$

i punti di cui si parla nell'enunciato.

Innanzi tutto, in forza del teorema del sig. OBRECHKOFF, la (2) risulta uniformemente convergente in $(x_k, y_k)$. Perciò, detto $\mu_n$ il minimo di $f_n^{(k)}(x)$ in questo intervallo, si ha che la serie

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + \dots$$

è convergente.

Ne segue che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_n(x) - \mu_n \frac{x^k}{k!} \right]$$

converge nei punti $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k-1}$; $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k-1}$ [1]. Mettendo in relazione questo fatto con la circostanza che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f_n^{(k-1)}(x) - \mu_n x]$$

ha per termini funzioni non decrescenti nell'intervallo $(x_k, y_k)$, se ne ricava che quest'ultima è uniformemente convergente nell'in-

[1] La cosa si verifica per tutti i punti $x_0, x_1, \dots; y_0, \dots y_l$.

tervallo $(x_{2k-1}, y_{2k-1})$, e che quindi lo stesso si verifica per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k-1)}(x)$.

Ragionando allo stesso modo sulle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(x) - \mu_n \frac{x^k}{k!} - \nu_n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right], \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n^{(k-2)}(x) - \mu_n \frac{x^2}{2} - \nu_n x\right],$$

dove $\nu_n$ denota il minimo di $f_n^{(k-1)}(x) - \mu_n x$ in $(x_{2k-1}, y_{2k-1})$, si arriva a provare la uniforme convergenza della serie delle $f_n^{(k-2)}(x)$ in $(x_{3k-3}, y_{3k-3})$.

E così continuando, fino alla serie (1).

2. Detta $F(x)$ la somma della serie (1) in $(x_l, y_l)$, è ovvio che per tutti i punti di questo intervallo si ha:

$$F^{(r)}(x) = f_1^{(r)}(x) + f_2^{(r)}(x) + \ldots + f_n^{(r)}(x) + \ldots \quad (r = 1, 2, \ldots k).$$

La dimostrazione precedente ci permette altresì di affermare che se $l = \frac{(i+1)(2k-i)}{2}$, risultano convergenti uniformemente le serie (3) che corrispondono ai valori $k-i$, $k-i+1, \ldots, k$ dell'indice $r$.

Un'ultima osservazione: per $k=1$ risulta $\frac{k(k+1)}{2} = k$. È questo dunque il solo caso in cui le ipotesi del teorema di Obrechkoff conducono alla stessa tesi del nostro enunciato.