Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Broggi

Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 270–273.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_270_0>

Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali.

Nota di Ugo Broggi (a Milano).

Sunto. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ $\left(\textit{risp.}\ \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots\right)$ *rappresenti una funzione razionale nulla all'* ∞ *è che* $c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 + \dots$ *sia soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots$$

di raggio di convergenza non nullo, rappresenti una funzione razionale

$$F(z) = \pi(z) + P(z)/Q(z) = \pi(z) + f(z)$$

dove π, P, Q sono polinomi di grado h, m, $n > m$ e

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n$$

è che a partire dal valore $h+1$ dell'indice ν (incluso) sia

$$\gamma_\nu = \varphi^{(\nu)}(0)$$

e $\varphi(t)$ sia la soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti

$$b_n \varphi(t) + b_{n-1}\varphi'(t) + \dots + b_0 \varphi^{(n)}(t) = 0$$

tale che

$$f(0) = \varphi(0), \quad f'(0) = \varphi'(0), \dots, \quad \frac{1}{\overline{n-1}!} f^{(n-1)}(0) = \varphi^{(n-1)}(0).$$

Il teorema è dimostrato ove si supponga

$$\pi(z) \equiv 0$$

e si dimostri che

$$\varphi(0) + \varphi'(0)z + \dots$$

ha il valore $f(z)$, e che, se

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

è anche

$$c_\nu = \varphi^{(\nu)}(0) \qquad (\nu = 0, 1, \dots).$$

1. La condizione è sufficiente. Ove sia

$$b_n \varphi(t) + b_{n-1}\varphi'(t) + \dots + b_0 \varphi^{(n)}(t) = 0$$

è anche identicamente in λ ed in t ($\lambda = 0, 1, \dots$)

$$\begin{vmatrix} \varphi^{(\lambda)}(t) & \varphi^{(\lambda+1)}(t) \dots & \varphi^{(\lambda+n)}(t) \\ \varphi^{(\lambda+1)}(t) & \varphi^{(\lambda+2)}(t) \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi^{(\lambda+n)}(t) & \varphi^{(\lambda+n+1)}(t) \dots & \varphi^{(\lambda+2n)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

e quindi, se

$$\varphi^{(\lambda)}(0) = c_\lambda,$$

si ha

$$C_\lambda = \begin{vmatrix} c_\lambda & c_{\lambda+1} \dots & c_{\lambda+n} \\ c_{\lambda+1} & c_{\lambda+2} \dots & c_{\lambda+n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\lambda+n} & c_{\lambda+n+1} \dots & c_{\lambda+2n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \dots).$$

Ma è questa la condizione necessaria e sufficiente perchè la serie

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

rappresenti una funzione razionale

$$f(z) = P(z)/Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}$$

di denominatore di grado uguale ad n e di numeratore di grado al più uguale a $n - 1$.

Infatti da

$$\frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

si ha

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_0 & = b_0 c_0 \\ a_1 & = b_1 c_0 + b_0 c_1 \\ a_2 & = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} & = b_{n-1} c_0 + b_{n-2} c_1 + \dots + b_0 c_{n-1} \\ 0 & = b_n c_0 \quad + b_{n-1} c_1 + \dots + b_0 c_n \\ 0 & = b_n c_1 \quad + b_{n-1} c_2 + \dots + b_0 c_{n+1} \\ 0 & = b_n c_2 \quad + b_{n-1} c_3 + \dots + b_0 c_{n+2} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Poichè tutti i determinanti C_λ sono uguali a zero, quelle fra le equazioni (A), di cui il primo membro è uguale a 0, possono venire risolte rispetto a $b_0, b_1, \dots, b_n$, che figurano tutti in ciascuno dei loro secondi membri. Ed i valori b_k, $(k = 0, 1, \dots, n)$, che soddisfano le prime $n + 1$ equazioni di primo membro nullo, soddisfano ogni sistema

$$(1) \qquad b_n c_{\lambda+k} + b_{n-1} c_{\lambda+k+1} + \dots + b_0 c_{n+\lambda+k} = 0$$
$$(k = 0, 1, \dots, n)$$

ed ogni equazione che non occupa uno dei primi n posti del quadro (A).

Otteniamo $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sostituendo nei secondi membri delle prime n equazioni di (A) ai c_k e b_k, $(k = 0, 1, \dots, n - 1)$, i loro valori.

Reciprocamente, ove siano soddisfatte le (1) e sia

$$y = c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 + \dots,$$

si ha:

$$b_n y + b_{n-1}y' + \dots + b_0 y^{(n)} = (b_n c_0 + b_{n-1}c_1 + \dots + b_0 c_n) +$$
$$+ \frac{t}{1!}(b_n c_1 + b_{n-1}c_2 + \dots + b_0 c_{n+1}) + \dots = 0,$$
$$y_0 = c_0, \quad y_1 = c_1, \dots, \quad y^{(n-1)} = c_{n-1}.$$

2. Sia b_0, $b_n \neq 0$, $z = 1/y$,

$$f(y) = \frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1}y^{n-1}}{b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n} = \varphi(0) + \varphi'(0)y + \varphi''(0)y^2 + \dots$$

È anche

$$\text{(B)} \qquad \frac{a_{n-1} + a_{n-2}z + \dots + a_0 z^{n-1}}{b_n + b_{n-1}z + \dots + b_0 z^n} = \frac{\varphi(0)}{z} + \frac{\varphi'(0)}{z^2} + \dots$$

La (B) risolve, nel caso in cui $F(z)$ sia razionale e nulla all'infinito, il problema di inversione dell'integrale

$$\int_0^\infty e^{-tz}\psi(t)dt = F(z)$$

indipendentemente dalla formula d'inversione di Riemann.

La serie $\frac{\varphi(0)}{z} + \frac{\varphi'(0)}{z^2} + \dots$, convergente per $|z| > \rho$, se ρ è il modulo massimo delle radici di

$$\text{(C)} \qquad b_n + b_{n-1}z + \dots + b_0 z^n = 0,$$

è infatti a un tempo lo sviluppo dell'integrale

$$\int_0^\infty e^{-tz}\varphi(t)dt,$$

che converge nel semipiano $R(z) >$ massimo della parte reale delle radici di (C), e della funzione

$$\frac{a_{n-1} + a_{n-2}z + \dots + a_0 z^{n-1}}{b_n + b_{n-1}z + \dots + b_0 z^n},$$

cosicchè può scriversi

$$\frac{a_{n-1} + a_{n-2}z + \dots + a_0 z^{n-1}}{b_n + b_{n-1}z + \dots + b_0 z^n} = \int_0^\infty e^{-tz}\varphi(t)dt.$$