Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Mario Manarini

Il principio di Hamilton ed il moto di un punto di massa variabile

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 267–270.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Il principio di Hamilton ed il moto di un punto di massa variabile.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna) [1].

Sunto. - *Si stabilisce per il caso della massa* m *variabile un'espressione per l'azione di* HAMILTON, *che soggetta al solito principio variazionale di* HAMILTON *conduce ad un'equazione del moto che compendia i casi particolari trattati dal prof.* LEVI-CIVITA.

1. Studiando il problema del moto di un punto di massa m variabile si perviene ai seguenti risultati dovuti principalmente al prof. LEVI-CIVITA [2].

[1] Questa Nota fu l'oggetto di una comunicazione al Congresso della Società Italiana per il progresso delle Scienze, tenutosi quest'anno dal 7 al 14 settembre in Trento-Bolzano; perciò essa apparirà, con maggiori dettagli, negli « Atti » della suddetta Società.

[2] Cfr. in modo particolare i Suoi lavori: *Ancora del moto di un corpo di massa variabile*. « Rendiconti Acc. Lincei », vol. XI, pp. 626-632 (1930);

1°) Se la massa m varia per irraggiamento uniforme, si conferma con il JEANS [1] la validità dell'equazione di NEWTON:

$$m \frac{dv}{dt} = F. \tag{1}$$

2°) Se la massa m varia per cattura di corpuscoli per urto anelastico e dei quali μ_s e w_s siano le rispettive masse e velocità (assolute), l'equazione diviene

$$d(mv) = Fdt + \Sigma \mu_s w_s. \tag{2}$$

La quantità di moto totale $Q = \Sigma \mu_s w_s$, dei corpuscoli che collidono nell'intervallo dt, e che può anche essere scritta $Q = (\Sigma \mu_s) w = dm\, w$, essendo w un vettore che può chiamarsi *velocità media* o *baricentrale*, nell'ipotesi della simmetria statistica è nulla per $v = 0$.

Per v non nulla, supposte uguali le μ_s ed ammessa per le w_s la legge di distribuzione Maxwelliana (rispetto alle stelle fisse) ed ancora, anche supposte rappresentate per i meteoriti, oltre tutte le velocità, tutte le masse, e assunta la funzione di distribuzione, per velocità e massa, di massima probabilità calcolata dal LEVI-CIVITA in estensione a quella Maxwelliana, si trova che Q non è nullo e risulta parallelo a v.

Nel caso che si possa trascurare il quadrato della quantità $\frac{\overline{w}}{v}$ ove $\overline{w}$ è la velocità media quadratica delle w_s dei corpuscoli si dimostra che la Q è trascurabile di fronte a $dm \cdot v$ e perciò la (2), diviene, in queste condizioni

$$\frac{d(mv)}{dt} = F. \tag{3}$$

2. La questione è lungi dall'essere esaurita, avendosi anche in natura esempi di masse variabili che non rientrano nei casi considerati, come la perdita di massa riguardante alcune comete. Non facendo, per ora, alcuna ipotesi sul modo di variare della massa m, all'infuori di quella matematica che suppone m, finita, continua, derivabile rispetto al tempo, si prospetta il problema di

Pulviscolo cosmico e distribuzione Maxwelliana. « Atti della Pontificia Acc. delle Scienze, Nuovi Lincei », a. LXXXIII, pp. 176-189.

Non possono non essere menzionate le osservazioni dell'ALMANSI e del FERMI che vennero sfruttate nei precedenti studi.

[1] Sir J. H. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge, « University Press », (1929), pag. 298.

studiare in qual modo debbasi estendere il principio di HAMILTON relativo alla massa m costante.

Esso, come è noto, viene così enunciato: « Fra tutti i moti possibili che fanno passare il punto M di massa m (costante) da una data posizione M_0 al tempo t_0 ad un'altra data posizione M_1 all'istante t_1, il moto che effettivamente avviene è quello che rende minima l'azione $\mathcal{A}$ di HAMILTON, cioè l'integrale definito

$$\mathcal{A}=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt, \tag{4}$$

dove T è l'energia cinetica ed U il potenziale delle forze applicate.

Viceversa, ammesso questo principio di HAMILTON se ne deduce, per m costante, l'equazione di NEWTON

$$m\frac{dv}{dt}=\text{grad } U.$$

È facile vedere che, essendo w la velocità media o baricentrale dell'incremento o decremento di massa che nel tempo dt si effettua sulla massa m, per compendiare in un principio di HAMILTON esteso, le equazioni del moto considerate dal LEVI-CIVITA, basta prendere per espressione dell'azione

$$A'=\int_{t_0}^{t_1}\left|T+U-\int_{t_0}^{t}\frac{dm}{dt}w dt\times v\right]dt. \tag{5}$$

Infatti si prenda il punto M funzione di t e di un parametro arbitrario ν; anche l'azione A' risulterà funzione di questa ν. Andiamo ad esprimere che per qualunque moto, prossimo all'effettivo, che si otterrà dando a ν l'incremento $\delta\nu$, la variazione corrispondente di A' è nulla.

Facciamo però l'ipotesi che durante il moto fittizio, prossimo al vero, la legge di variazione della massa m sia la *stessa* che nel moto reale. Indicando con δ il segno di variazione rispetto a ν, e con ∂ quello rispetto a t, dovremo porre, in conformità

$$\delta m=0,\quad \delta w=0$$

e quindi

$$\delta A'=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+\delta U-\int_{t_0}^{t}\frac{dm}{dt}w dt\times\delta v\right)dt.$$

Sviluppando le variazioni e dopo un'integrazione per parti si ottiene

$$\delta A' = \int_{t_0}^{t} \left[\operatorname{grad} U - \frac{\partial}{\partial t}(mv) + \frac{dm}{dt} w \right] \times \delta M \cdot dt,$$

e perchè questa variazione sia nulla per ogni δv deve essere

$$\frac{d(mv)}{dt} = \operatorname{grad} U + \frac{dm}{dt} w. \tag{6}$$

Trattiamo ora i casi del prof. LEVI-CIVITA.

Nel caso dell'irraggiamento uniforme si ha manifestamente $w = v$ e quindi la (6) diviene precisamente:

$$m \frac{dv}{dt} = \operatorname{grad} U.$$

Per la caduta dei corpuscoli in moto continuo la (6) coincide pure con la (2) stabilita dal LEVI-CIVITA con la considerazione degli urti anelastici. Sembrerebbe quindi soddisfacente la forma (5) data all'azione di HAMILTON nel caso della massa m variabile; e ciò tanto più se si osserva che l'espressione $\int_{t_0}^{t} \frac{dm}{dt} w dt \times dM$ introdotta nell'azione elementare di HAMILTON può rientrare nella teoria dei fenomeni ereditari.