Bollettino Unione Matematica Italiana

Eduardo Gugino

Sopra una ulteriore semplificazione, in un caso particolare, della espressione analitica dell'effetto cinetodinamico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 261–267.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_261_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

Sopra una ulteriore semplificazione, in un caso particolare, della espressione analitica dell'effetto cinetodinamico.

Nota di EDUARDO GUGINO (a Messina).

Sunto. - *L'A. mostra come l'espressione analitica dell'effetto cinetodinamico in un intervallo di tempo (abbastanza piccolo) τ possa assumere forma semplice ed espressiva nel moto dei sistemi costituiti da uno o più punti materiali, comunque sollecitati, vincolati però a muoversi su piani fissi di giacitura arbitraria, purchè non intervengano vincoli di altra natura; inoltre egli dimostra la non validità del teorema del massimo effetto, sotto forma geometrica, in un caso recentemente annunziato, nella particolare ipotesi che i punti del sistema (a vincoli indipendenti dal tempo) abbiano tutti accelerazioni costanti.*

Nel moto di un qualsivoglia sistema S di punti P_i $(i = 1, 2,..., N)$ di masse m_i, comunque vincolato e sollecitato, a partire dalla generica configurazione C e dall'atto di moto v_i all'istante t, ove si denoti con a_i la distribuzione di accelerazioni relative allo stesso istante, con F_i la risultante delle forze attive che sollecitano i punti P_i, abbiamo definito (²) come effetto cinetodinamico (naturale) durante l'intervallo di tempo abbastanza piccolo τ, successivo al-

(²) Cfr. E. GUGINO, *Sulla validità ed estensione del teorema del massimo effetto* « Rend. Acc. Lincei », vol. X, serie 6ª, 2° semestre, fasc. 9, 1929.

l'istante t, lo scalare E_N espresso dalla relazione:

$$(1) \qquad E_N = \sum_1^N {}_i m_i \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2 \right)^2 + \tau^2 \sum_1^N {}_i (F_i - m_i a_i) \times \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2 \right).$$

Riguardando il secondo membro come funzione quadratica delle a_i, con m_i, v_i, F_i, τ, prefissate, se in luogo delle a_i relative al moto naturale si sostituisce una qualsivoglia distribuzione di accelerazioni a_i^*, compatibile coi vincoli (a partire dalla configurazione C e dall'atto di moto v_i all'istante t) si ottiene la formula di definizione dell'effetto cinetodinamico virtuale E, relativo al generico moto conciliabile coi vincoli, durante il medesimo intervallo di tempo τ:

$$(1') \qquad E = \sum_1^N {}_i m_i \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i^* \tau^2 \right)^2 + \tau^2 \sum_1^N {}_i (F_i - m_i a_i^*) \times \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i^* \tau^2 \right).$$

In particolare, se il sistema S è a legami indipendenti dal tempo e se convenientemente si limita il campo di variabilità delle accelerazioni a_i^*, in guisa da tenere conto soltanto delle accelerazioni che competono al moto di un qualsivoglia sistema S^* che si deduce da S per l'aggiunta di vincoli « a raccordo » comunque scelti, gli effetti E_N ed E relativi al moto dei sistemi S ed S^*, a partire dal medesimo atto di moto all'istante t, possono più semplicemente definirsi per mezzo delle formule

$$(2) \qquad \begin{cases} E_N = \sum_1^N {}_i m_i \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2 \right)^2 + \frac{\tau^4}{4} \sum_1^N {}_i (F_i - m_i a_i) \times a_i, \\ E = \sum_1^N {}_i m_i \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i^* \tau^2 \right)^2 + \frac{\tau^4}{4} \sum_1^N {}_i (F_i - m_i a_i^*) \times a_i^*. \end{cases}$$

Se poi il sistema S e quindi anche S^* si suppone che partano dalla quiete, alle formule (2) si può dare, come sappiamo, la seguente forma geometrica più espressiva:

$$(3) \qquad E_N = \sum_1^N {}_i m_i \overline{M_i N_i}^2, \quad E = \sum_1^N {}_i m_i \overline{M_i N_i}^2,$$

ove M_i denota la posizione generica del punto P_i all'istante t a partire dalla quiete ed N_i e V_i denotano le posizioni del medesimo punto, dopo l'intervento di tempo τ, rispettivamente nel moto reale vincolato oppure in un qualsivoglia moto compatibile coi vincoli, realizzato con l'aggiunta di legami comunque scelti.

Entro i limiti di validità delle (1) e (1'), (2) e (3) abbiamo dimostrato che E_N è massimo tra tutte le possibili determinazioni di E.

Ciò posto, se si considera la speciale categoria di sistemi a legami indipendenti dal tempo, formati da uno o più punti materiali, comunque sollecitati, però vincolati con piani (fissi) in qualsiasi modo orientati, senza che intervengano vincoli di altra natura, vogliamo dimostrare che per tali particolari sistemi le formule (2) sono entrambe suscettibili di ulteriore semplificazione; poscia faremo vedere, che con riferimento alle espressioni geometriche (3) dell'effetto cinetodinamico, non è purtroppo possibile fare rientrare [1] un altro caso di validità del nostro teorema recentemente annunziato dal prof. MINEO, oltre quello da noi considerato; tale caso invece è stato ritenuto valido per quei sistemi, sempre a legami indipendenti dal tempo, sollecitati da forze posizionali, nella ulteriore ipotesi che i punti P_i, a partire da un generico atto di moto v_i, abbiano tutti accelerazioni costanti.

Se gli N punti P_i di un sistema S a legami indipendenti del tempo, comunque sollecitati, si suppongono vincolati per mezzo di piani fissi, comunque orientati, i vincoli bilaterali imposti agli atti di moto del sistema, saranno espressi come è noto, da equazioni del tipo:

$$B_k(v) = 0$$

coi primi membri forme lineari a coefficienli costanti, nelle componenti delle velocità v_i dei punti P_i, rispetto ad una terna galileiana prefissata.

Le distribuzioni di accelerazioni a_i^* compatibili coi vincoli, sono manifestamente definite dalle equazioni che si deducono dalle precedenti per derivazione rapporto al tempo:

$$B_h(a^*) = 0 \tag{4}$$

relazioni che differiscono dalle precedenti, solo per la sostituzione materiale delle componenti delle velocità v_i con le analoghe componenti delle accelerazioni a_i, che i vincoli consentono ai singoli punti P_i del sistema; le equazioni (4) a meno della denominazione delle variabili coincidono con le:

$$B_h(\delta P) = 0$$

che, notoriamente, definiscono tutti e solo gli spostamenti virtuali del sistema a partire da una generica configurazione.

[1] CORRADINO MINEO, *Sul modo di variare dell'energia d'accelerazione, ecc.* « Bollettino Unione Matematica Italiana », fasc. 3°, Giugno 1930.

Da ciò ne segue, che nella nostra ipotesi sulla natura dei vincoli, ogni distribuzione di accelerazioni compatibile con essi si identifica con uno spostamento virtuale e viceversa.

Ciò posto, qualunque sia la configurazione e l'atto di moto al generico istante t, ove si denoti con a_i la distribuzione di accelerazioni relativa al moto naturale, applichiamo al moto del nostro sistema S l'equazione generale della dinamica, cui possiamo in particolare dare la seguente forma:

$$\sum_1^N {}_i (F_i - m_i a_i) \times a_i = 0. \tag{5}$$

Se i vincoli addizionali a raccordo relativi al sistema S^* sono pure realizzati con piani fissi opportunamente scelti, anche per tale sistema ha luogo l'equazione:

$$\sum_1^N {}_i (F_i - m_i a_i^*) \times a_i^* = 0. \tag{5'}$$

Avuto riguardo alle (5) e (5') le formule di definizione (2), pel moto dei sistemi particolari considerati assumono in definitiva la forma più semplice cui si voleva pervenire:

$$E_N = \sum_1^N {}_i m_i \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2\right)^2,$$

$$E = \sum_1^N {}_i m_i \left(v_i \tau + \frac{1}{2} a_i^* \tau^2\right)^2,$$

e pel nostro teorema, l'effetto E_N durante l'intervallo di tempo abbastanza piccolo τ, relativo al moto di S, risulta massimo rispetto all'effetto E, durante lo stesso intervallo di tempo, relativo al moto del sistema S^*, che, giova ripeterlo, si deduce da S per l'aggiunta di vincoli a raccordo, purchè realizzati con piani fissi opportunamente orientati.

***

Applicando lo sviluppo del TAYLOR, lo spostamento reale $N_i - M_i$ del generico punto P_i nell'intervallo di tempo abbastanza piccolo τ, può manifestamente mettersi sotto la forma:

$$N_i - M_i = v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2 + \frac{1}{3!} \frac{da_i}{dt} \tau^3 + [4],$$

ove il simbolo [4] denota un certo vettore il cui modulo è del 4° ordine almeno rispetto a τ. L'espressione geometrica (3) dell'effetto cinetodinamico E_N, a meno di termini del 5° ordine rispetto a τ, assume quindi l'aspetto

$$(6)\qquad \sum_1^N {}_i m_i \overline{M_iN_i}^2 = \tau^2 \sum_1^N {}_i m_i v_i^2 + \tau^3 \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{a}_i + \frac{\tau^4}{4} \sum_1^N {}_i m_i a_i^2 + \\ + \frac{\tau^4}{3} \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \frac{d\boldsymbol{a}_i}{dt}.$$

Il prof. MINEO considera il caso, che il sistema S in moto sia a vincoli indipendenti dal tempo, sollecitato da forze posizionali, e che i suoi punti abbiano tutti accelerazioni costanti. Denotando con R_i la risultante delle forze vincolari che si esercitano sui punti P_i, ha luogo, com'è noto, l'equazione che traduce il principio dei lavori virtuali per i sistemi a legami indipendenti dal tempo:

$$(7)\qquad \sum_1^N {}_i \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{v}_i = 0.$$

Inoltre per il postulato delle reazioni vincolari si ha:

$$(8)\qquad m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i.$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri di tale relazione per $\boldsymbol{v}_i$, sommando rispetto all'indice i e tenendo conto della (7) si deduce:

$$(9)\qquad \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{v}_i = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{v}_i.$$

Il procedimento seguito dal prof. MINEO essenzialmente consiste nel derivare entrambi i membri della (9) rapporto al tempo; avendo supposto le $\boldsymbol{a}_i$ costanti, si ottiene la relazione:

$$(10)\qquad \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{a}_i^2 = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{a}_i + F,$$

ove col simbolo F si denota la funzione:

$$(11)\qquad F = \sum_1^N {}_i \frac{d\boldsymbol{F}_i}{dt} \times \boldsymbol{v}_i,$$

che nella ipotesi di forza posizionale Egli ritiene espressa in termini soltanto della configurazione, dell'atto di moto e del tempo. Supposta tale funzione, indipendente dalle accelerazioni, l'Autore fa discendere la proprietà di massimo dell'effetto E_N, espresso per mezzo della formula (6), relativa alla distribuzione di accelerazioni nel moto natnrale, dall'analoga proprietà di minimo della nota funzione dell'APPELL:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\sum_1^N {}_i m_i a_i^2 - \sum_1^N {}_i F_i \times a_i,$$

rispetto alle distribuzioni di accelerazioni $a_i{}^*$ in un generico moto maggiormente impedito, realizzato cioè con l'aggiunta di legami a raccordo comunque scelti.

Conviene però innanzi tutto rilevare che se pure i termini del 4° ordine nella (6) $\frac{\tau^4}{3}\sum_1^N {}_i m_i \frac{da_i}{dt} \times v_i$ per ipotesi sono nulli nel moto reale, in generale essi non risultano ugualmente nulli nel moto maggiormente impedito; e siccome tali termini, su cui nulla può dirsi *a priori*, sono dello stesso ordine di grandezza di quelli che essenzialmente intervengono nel ragionamento, nessuna conclusione può ottenersi se prima non si esamina il loro comportamento; ciò che il prof. MINEO non ha fatto premilinarmente.

Inoltre non è lecito senz'altro affermare che la funzione F definita dalla (11) risulti nel moto reale, indipendente dalle accelerazioni, anche se ciò possa sembrare formalmente; occorre prima indagare la natura di tale funzione, in relazione con le ipotesi fatte e con i postulati fondamentali della dinamica, se non si vuole incorrere in qualche equivoco.

Avendo supposto le accelerazioni costanti, dalle (8), derivando rapporto al tempo, si deduce:

$$\frac{dF_i}{dt} = -\frac{dR_i}{dt}.$$

Moltiplicando scalarmente per v_i e sommando rispetto all'indice i, si ottiene:

$$\sum_1^N {}_i \frac{dF_i}{dt} \times v_i = -\sum_1^N {}_i \frac{dR_i}{dt} \times v_i. \tag{12}$$

Derivando pure rapporto al tempo la (7) si ha:

$$\sum_1^N {}_i R_i \times a_i = -\sum_1^N {}_i \frac{dR_i}{dt} \times v_i. \tag{13}$$

Tenendo conto delle (12) e (13), la (11) può mettersi sotto la forma

$$F = \sum_1^N {}_i R_i \times a_i. \tag{14}$$

e contrariamente a quanto ha ritenuto il prof. MINEO, la funzione $\boldsymbol{F}$ dipende anche dalle accelerazioni, nè di essa si può non tenere conto nel di Lui procedimento.

Alle medesime conclusioni si può anche arrivare per altra via. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della (8) per $\boldsymbol{v}_i$ e poscia sommando rispetto all'indice i, si perviene all'equazione:

$$\sum_1^N {}_i (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \times \boldsymbol{v}_i = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{v}_i .$$

Per la costanza delle accelerazioni, sempre in base alla (8), risultano pure costanti le risultanti $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i$ delle forze totali che sollecitano i punti P_i; derivando, in tale ipotesi, l'ultima equazione rapporto al tempo, si deduce:

$$\sum_1^N {}_i (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \times \boldsymbol{a}_i = \sum_1^N {}_i m_i a_i^2 .$$

Confrontando con la (10), si viene a stabilire la (14), senza essere necessario di ricorrere alla duplice ipotesi restrittiva sulla natura dei vincoli e della sollecitazione attiva. In particolare si ottiene la medesima conclusione, come si è visto, direttamente, anche nelle ipotesi predette.