Bollettino Unione Matematica Italiana

Umberto Crudeli

Velocità angolare e schiacciamento delle figure di equilibrio dei fluidi rotanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 257–258.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_257_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

PICCOLE NOTE

Velocità angolare e schiacciamento delle figure di equilibrio dei fluidi rotanti.

Nota di UMBERTO CRUDELI (a Cagliari).

Sunto. - *In questa Nota, l'Autore stabilisce una semplicissima limitazione per la velocità angolare dipendentemente dallo schiacciamento della figura di equilibrio.*

In una interessante Nota dal titolo: *Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flussigkeiten*, comparsa nel « Mathematische Zeitschrift » del 1929 (Bd. 31, Heft 2-3), il sig. L. NIKLIBORC mostra dapprima (pag. 370) che la velocità angolare ω converge a zero con lo schiacciamento $\frac{b}{a}$, servendosi della ineguaglianza

$$(1) \qquad \frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} < \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{+1} \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{a}{b}\right)^2 (1+t)}} \right\} dt,$$

la quale costituisce il risultato essenziale di essa Nota.

Conviene pertanto rilevare, in qualche modo, come l'importanza della (1) provenga dalla *rapidità* con la quale il suo secondo membro converge a zero con $\frac{b}{a}$; giacchè, per mostrare semplicemente che ω converge a zero, basterebbe ragionare come segue.

In virtù di una ineguaglianza sulle derivate prime del potenziale newtoniano, analoga alla ineguaglianza del LIAPOUNOFF relativa a codesto medesimo potenziale, noi abbiamo che ogni derivata di primo ordine del potenziale $V \equiv \int_{(T)} \frac{d\tau}{r}$ non supera in valore assoluto

$$4\pi \left(\frac{3}{4\pi} v\right)^{\frac{1}{3}},$$

designando con v il volume del fluido. Ora per noi

$$v < 2\pi b a^2,$$

avendo denotato: con a il limite superiore delle distanze normali fra i punti della figura d'equilibrio e il suo asse di rotazione; con b quello delle distanze normali fra i punti della medesima figura e il piano baricentrale perpendicolare a codesto asse. Ne segue che, nel nostro caso, i valori assoluti delle predette derivate sono inferiori a

$$4\pi\left(\frac{3}{2}a^2 b\right)^{\frac{1}{3}}.$$

D'altra parte, scegliendo in modo conveniente l'asse delle x, vi sarà un punto (diciamolo P_0) di codesto asse tale che noi potremo scrivere la seguente ineguaglianza, da cui prese le mosse il sig. NIKLIBORC,

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} \leqq \frac{1}{a\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{P_0},$$

avendo designato con f la densità (costante) del fluido e con $\varkappa$ la costante dell'attrazione. Dunque

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} < 4\left(\frac{3b}{2a}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Questa ineguaglianza semplicissima (che sussiste anche nel caso del fluido non omogeneo, riguardandovi allora f come limite superiore della densità) non può rivaleggiare con (1) per quanto concerne la rapidità di convergenza di cui sopra [basterebbe consultare lo sviluppo del secondo membro della (1) dato dal sig. NIKLIBORC a pag. 373 della sua Nota, formula (11)]. Tuttavia questa nostra ineguaglianza fa immediatamente vedere che la velocità angolare converge a zero con lo schiacciamento.