RECENSIONI

F. LEVI: *Geometrische Konfigurationen mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie.* (Leipzig, S. Hirzel. 1929), pag. VIII–310.

Il fine didattico, affermato nella *Prefazione* (pagg. V–VI), si rivela d'altronde al lettore nel giudizioso ordinamento della materia, nella parte concessa alle teorie ausiliari, nella cura con la quale in ogni paragrafo sono enunciati e numerati i teoremi e sono proposti quesiti per esercizio, nell'abbondanza delle nitide figure, nella stessa voluta sobrietà delle citazioni che si incontrano nel testo e (pagg. 295-306) nell'*Appendice*.

L'Autore osserva che l'opera sua colma una lacuna, perchè, nella ricca letteratura sulle *Configurazioni*, manca il trattato: osservazione esatta se riferita ad un trattato d'indole affatto generale, chè altrimenti sarebbe da ricordare una recente monografia del GALLUCCI [1].

Nell'*Introduzione* (pagg. 1-9) è definita la *configurazione* p_γ, g_π, come sistema di p punti e g rette, tale che ciascun punto (ciascuna retta) sia precisamente incidente a γ rette (a π punti) con $p\gamma = g\pi$; ed è pur definita l'*equivalenza* (risp. la *reciprocità*) fra configurazioni, come corrispondenza biunivoca in cui si corrispondano elementi omonimi (risp. eteronimi) e ad elementi incidenti corrispondano elementi incidenti: in particolare si considera l'*automorfismo* (equivalenza o reciprocità di una configurazione in sè).

Una configurazione dà luogo ad una *tavola d'incidenza* con p orizzontali e g verticali (riferite ai p punti ed alle g rette), ponendosi il segno $\times$ d'incidenza sull'incrocio di linee rispondenti ad elementi fra loro incidenti. Reciprocamente una tavola, che rispetti le proprietà formali di una tavola d'incidenza, può conside-

(1) G. GALLUCCI, *Complementi di Geometria proiettiva. Contributo alla geometria del tetraedro ed allo studio delle configurazioni.* (Napoli, Rondinella e Loffredo, 1928).

rarsi come una *configurazione schematica*, anche all'infuori della effettiva realizzazione con punti e rette.

Il Cap. I (pagg. 10-39) racchiude un'esposizione succinta ma sistematica di *Teoria dei gruppi*, destinata a trovare nel seguito molteplici applicazioni. Già quì però il legame col contenuto dell'opera appare nella nozione di *Gruppo di una figura*. Sia una *figura* composta di elementi di due specie (p. e. punti e rette) e, per due elementi di diversa specie, sia definita la relazione d'incidenza, onde (come nel caso particolare delle configurazioni) possano considerarsi automorfismi e distinguere fra quelli che conservano e quelli che mutano la specie. Ed allora tutti gli automorfismi formano gruppo (il *gruppo della figura in senso largo*) entro il quale gli automorfismi conservanti la specie formano a loro volta gruppo (il *gruppo della figura in senso stretto*); così in particolare per le configurazioni.

Carattere ausiliare ha pure l'ampio Cap. II (pagg. 40-90), che può dirsi un breve trattato di *Topologia combinatoria delle superficie* e che, per la sua sistemazione didattica, può utilmente leggersi, anche all'infuori dello scopo a cui esso è diretto. Vi si trovano però applicazioni alle configurazioni nel piano projettivo (di soli punti reali) inteso come superficie unilatera *(geschlossenes Möbiusband)*.

Il Cap. III (pagg. 91-138), rientrando nel vivo dell'argomento, tratta delle più semplici *configurazioni projettive* e di argomenti analoghi. Sono innanzi tutto studiate le configurazioni n_3, per cui $\pi = \gamma = 3$, onde $p = g (= n)$. Impossibili per $n < 7$, per $n \geq 7$ sono schematicamente possibili, anzi realizzabili nel piano mediante punti e cerchi (in luogo di rette); per $n = 7$ si collegano al G_{168} di Klein, ma non sono realizzabili con punti e rette nel piano projettivo (nemmeno coll'estensione algebrica mediante elementi immaginarî o con quella topologica mediante rette deformate); per $n = 8$ sono realizzabili, ma coll'introduzione di elementi immaginarî ed in un solo tipo, ampliabile nella $9_4, 12_3$ che ammette il gruppo di Hesse; per $n = 9$ sono invece realizzabili (con punti e rette reali) in tre diversi tipi, in corrispondenza alla discussione della cosiddetta *Ergänzungsfigur*.

Nelle 9_3 intervengono terne di triangoli di cui ciascuno è inscritto ad uno e circoscritto all'altro dei rimanenti, mentre non esistono coppie di triangoli (a vertici distinti) mutuamente inscritti e circoscritti. Ciò avviene invece per i tetraedri di Möbius che l'Autore largamente studia anche in relazione alla ripartizione dello spazio da essi prodotta.

Il Capitolo termina con una digressione sulle *reti* [1] e sulla loro applicazione allo studio dei *corpi numerici*.

Il Cap. IV (pagg. 139-178) tratta invece delle *configurazioni poliedrali*; una di esse è la:

$$\Pi^n_{(N)} = \left[\binom{N}{n-1}_{N-n+1}, \binom{N}{n}_n\right]$$

i cui punti e le cui rette sono le sezioni con un piano generico degli S_{n-2} e degli S_{n-1} che congiungono N punti generici di S_n ad $n-1$ ad $n-1$, risp. ad n ad n. Tali $\Pi^n_{(N)}$, e le $P^n_{(N)}$ loro duali nel piano, vengono studiate anche nelle loro applicazioni alla cinematica e (G. Jung) alla statica. Ma in modo speciale è considerata (con interessanti sviluppi così topologici come gruppali) la $\Pi^3_{(5)}$ di Desargues, identificabile colla 10_3 composta da vertici e lati di due triangoli omologici, da centro ed asse d'omologia, dalle rette e dai punti appartenenti a coppie di vertici, risp. di lati omologhi. Il Capitolo si chiude con un cenno su configurazioni di punti e sfere in S_n.

Il Cap. V (pagg. 179-235) è poi dedicato all'*esagramma (Pascalfigur)* e quindi alla configurazione 45_4, 60_3 per la quale il gruppo degli automorfismi si identifica con quello simmetrico su 6 elementi. Uno speciale algoritmo *(Rechnenverfahren)* facilita lo studio, coll'intervento dei punti di Pascal, di Kirkman, di Steiner, di Salmon, delle rette di Pascal, di Cayley-Salmon, di Plücker, delle coniche di Bauer, della *rete* infine annessa all'esagramma (o più in generale al gruppo di n punti di una conica) anche in relazione alla teoria dei corpi numerici ed all'esistenza di m-ple di numeri trascendenti algebricamente indipendenti.

Chiude il trattato il Cap. VI (pagg. 236-294) sui poliedri regolari (così platonici come di Poinsot) e sulle connesse questioni topologiche, gruppali, analitiche.

In Italia, pur nel rigoglioso sviluppo di altri e più larghi indirizzi geometrici, lo studio delle configurazioni e di argomenti affini ha sempre trovato valenti cultori; d'altra parte le attuali esigenze della Geometria algebrica conferiscono maggior interesse agli argomenti d'indole topologica. Giova quindi sperare che il pregevole trattato di Friedrich Levi trovi attenti lettori anche fra noi.

L. Brusotti

[1] Per *rete (Netz)* qui s'intende una figura di punti e rette (reali), nel piano projettivo, tale che ogni retta (punto) appartenente a due punti (rette) della figura è nella figura, ed in cui si hanno quattro punti costituenti quadrangolo. Il numero degli elementi di una *rete* è necessariamente infinito.

L. BIEBERBACH: *Theorie der Differentialgleichungen*. Terza edizione con 22 figure e XIV + 400 pagine. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band VI). Julius Springer, Berlin, 1930.

Un libro, quale il presente, che esce nella sua terza edizione ad una distanza di poco più di tre anni dalla precedente, non ha bisogno certamente di essere presentato.

L'Autore ha ora voluto accontentare i suoi lettori anche in certe piccole esigenze di esposizione, quale la suddivisione dei paragrafi più lunghi in numeri, coi relativi titoli a ciascun numero, e quale, ancora, una revisione accurata di tutte quelle parti che potevano essere esposte con maggiore chiarezza. Le aggiunte non sono molte, le principali sono relative alla teoria di LIE, al teorema del ritorno di POINCARÉ, all'integrazione asintotica. Sono state poi, molto utilmente, aumentate le indicazioni bibliografiche.

Ecco un riassunto dell'indice delle materie:

Introduzione (pp. 1-5).

Parte I (pp. 6-139): *Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.* [Cap. I: Metodi elementari di integrazione. - Cap. II: Il metodo delle approssimazioni successive e sue diverse applicazioni. - Cap. III: La teoria di LIE. - Cap. IV: Discussione sull'andamento delle curve integrali. - Cap. V: Equazioni differenziali del primo ordine nel campo complesso].

Parte II (pp. 140-249): *Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.* [Cap. I: La esistenza delle soluzioni. - Cap. II: Metodi elementari di integrazione. - Cap. III: Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nel campo reale. - Cap. IV: Equazioni differenziali lineari del secondo ordine nel campo complesso].

Parte III (pp. 250-336): *Equazioni differenziali parziali del primo ordine e sistemi di equazioni differenziali ordinarie.*

Parte IV (pp. 337-398): *Equazioni differenziali parziali del secondo ordine.* [Cap. I: Generalità. - Cap. II: Equazioni differenziali iperboliche. - Cap. III: Equazioni differenziali ellittiche. - Cap. IV: Equazioni differenziali paraboliche].

Quest'Opera è ormai un vero gioiello per chi voglia avviarsi allo studio delle equazioni differenziali, ed è perciò doveroso di esprimere al valente Autore la riconoscenza degli studiosi dell'Analisi matematica. *a. m.*