BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

ANTONIO MAMBRIANI

Sulle successioni non uniformemente convergenti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 234–234.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_234_0>

Sulle successioni non uniformemente convergenti.

Nota di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. dà un esempio di successione non uniformemente convergente, in relazione ad un proposizione del sig.* J. C. VIGNAUX.

Nel n.° 3 (1930) di questo « Bollettino » il sig. J. C. VIGNAUX (¹) ha enunciato, ed ha creduto di aver dimostrato, la seguente proposizione:

Se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$, $f_n(x), \ldots$, *date in un intervallo chiuso* (a, b), *sono tali che sia, in ogni punto* x *di* (a, b),

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

e che la funzione limite $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ *sia continua, la convergenza della successione è uniforme in tutto l'intervallo considerato.*

L'ultimo passaggio della dimostrazione data dal VIGNAUX è evidentemente errato; ma è pure errata la proposizione stessa. come mostra il seguente esempio.

Poniamo, nell'intervallo (0, 1),

$$f_n(0) = 1,$$

$$f_n(x) = 0, \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = 1, \quad \text{per} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1.$$

Si ha. evidentemente. in ogni punto x di (0, 1),

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

e

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1.$$

La funzione limite $f(x)$ è dunque continua in tutto (0, 1); ma la convergenza della successione delle $f_n(x)$ non è affatto uniforme in (0, 1).

La proposizione più sopra riportata risulta vera se si aggiunge la condizione che le $f_n(x)$ siano tutte continue nell'intervallo (a, b). Ma. in tale caso, mentre la dimostrazione del VIGNAUX resta ancora errata. la proposizione si riduce ad un classico teorema del DINI.

(¹) *Sulle successioni uniformemente convergenti,* pp. 168-169.