
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

JULIO REY PASTOR

Sulla equiconvergenza delle successioni di funzioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **9** (1930), n.4, p. 232-233.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_232_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_232_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla equiconvergenza delle successioni di funzioni.

Nota del Prof. J. REY PASTOR (a Buenos Aires).

Nel numero di Giugno del « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » il signor J. C. VIGNAUX ha cercato di dimostrare che *se una successione crescente ⁽¹⁾ di funzioni*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$$

per ogni valore di x dell'intervallo chiuso (a, b) tende verso una funzione limite $f(x)$ continua in (a, b) , la convergenza è uniforme in questo intervallo.

La dimostrazione ha però un punto oscuro a causa d'una inavvertenza aritmetica, per cui la conclusione non è valida.

Ma anche se si prescinde da questo punto, la dimostrazione non è nemmeno valida, giacchè non si fa uso della continuità di $f(x)$ (soltanto della sua limitazione) e i più semplici esempi di successioni monotone che convergono non uniformemente verso una funzione limitata (tale per es. $1 - x^n$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$) rivelano l'insufficienza di questa condizione.

Non è possibile intanto correggere la dimostrazione, mettendo in giuoco tutte le ipotesi, e ciò perchè la proprietà enunciata non

⁽¹⁾ Per errore forse di traduzione si dice nella Nota del sig. VIGNAUX « successioni di funzioni monotone crescenti ».

Anche si dice nella Nota che la convergenza se suppose soltanto « per ogni valore di x inferiore all'intervallo chiuso (a, b) ». Si capisce che è necessaria la convergenza negli estremi. L'ultimo esempio sopra sviluppato dimostra che senza questa condizione, neppure la continuità è sufficiente per arrivare alla uniformità della convergenza.

è vera, come si vede subito nel seguente esempio semplicissimo:

$$f_n(x) = -\frac{1}{n} \quad \text{per } 0 < x \leq \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = 1 \quad \text{per } x = 0 \quad \text{e per } x > \frac{1}{n}.$$

La convergenza di questa successione non è uniforme, perchè per qualsiasi n e per ogni valore di x compreso fra 0 e $\frac{1}{n}$ si verifica $f(x) - f_n(x) > 1$.

Neppure si può concludere l'*equiconvergenza semplice* (secondo la definizione del DINI) come si vede dal precedente esempio.

Bisogna dunque aggiungere qualche altra condizione alle funzioni $f_n(x)$ per arrivare alla convergenza uniforme. Ma, se noi supponiamo *continue* tutte queste funzioni ritroviamo un classico teorema del DINI.

Una triviale generalizzazione sarebbe certo di supporre la continuità delle differenze $f_n(x) - f(x)$ ma non delle funzioni $f_n(x)$ e $f(x)$. Altre estensioni più interessanti del teorema del DINI e di quelle del prof. DELL'AGNOLA saranno svolte in altre Note.

Osserviamo che non basta neppure la continuità di questa differenza nell'intervallo aperto (a, b) . Infatti l'esempio sopra accennato si può modificare così ⁽¹⁾:

$$f_n(x) = -\frac{1}{n} \quad \text{per } 0 < x \leq \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1-x}{1-\frac{1}{n}}\right)^n \quad \text{per } \frac{1}{n} \leq x \leq 1,$$

$$f_n(0) = 0.$$

La convergenza di queste funzioni continue nell'intervallo $0 < x \leq 1$ non è uniforme e neppure semplicemente uniforme, per la stessa causa sopra accennata.

⁽¹⁾ Se si vogliono formare le funzioni con espressioni lineari, si prendono per es.:

$$f_n(0) = 0,$$

$$f_n(x) = -\frac{1}{n} \quad \text{per } 0 < x \leq \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = nx - \frac{n+1}{n} \quad \text{per } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n},$$

$$f_n(x) = \frac{x}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} \quad \text{per } \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$