Bollettino Unione Matematica Italiana

Gianfranco Cimmino

Su una questione di minimo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 162–167.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_162_0>

Su una questione di minimo.

Nota di GIANFRANCO CIMMINO (a Napoli).

Santo. - *L'A. mostra come rientri nell'ambito di alcune sue precedenti ricerche un teorema di minimo, di cui si è recentemente occupato M. Janet.*

Mi permetto di riprendere, ponendomi in condizioni molto più generali, un argomento che ho già toccato in un breve scritto su questo « Bollettino » (1). Sono stato indotto a ciò dalla lettura di due note di M. JANET, apparse alcuni mesi or sono (2), ove ho visto enunciate certe proprietà di minimo a cui si può pervenire, in ipotesi assai meno restrittive, seguendo la via da me tracciata in una Nota (3) di poco anteriore a quelle di M. JANET: è quanto mi propongo di mostrare nelle righe seguenti.

1. Ecco dunque, anzitutto, la questione di minimo di cui si tratta:

A) *Dato un intervallo* (a, b) *dell'asse* x, *determinare il mi-*

(1) Vol. VIII, (1929), pp. 225-26.

(2) M. JANET, *Sur le rapport des valeurs moyennes des carrés de deux dérivées d'ordres consécutifs* [« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. 188 (1° sem. 1929), pp. 681-83]; *Sur une suite de fonctions considérée par Hermite et son application à un problème de calcul des variations*. [Ibid., t. 190 (1° sem. 1930), pp. 32-34].

(3) G. CIMMINO, *Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta*. [« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IX, serie 6ª (1° sem. 1929), pp. 524-26].

nimo valore che può assumere il rapporto

$$(1)\qquad \frac{\int_a^b z^{(n)^2}\,dx}{\int_a^b z^{(p)^2}\,dx}, \qquad 0 \leq p \leq n,$$

quando si supponga che la z(x) *sia continua in* (a, b) *insieme con le prime* n — 1, *derivate, verifichi le condizioni*

$$(2)\quad z(a) = z'(a) = \ldots = z^{(n-1)}(a) = 0, \quad z(b) = z'(b) = \ldots = z^{(n-1)}(b) = 0,$$

abbia infine la derivata $z^{(n-1)}$ *assolutamente continua e la derivata* $z^{(n)}$ *(definita quindi quasi ovunque in* (a, b)) *di quadrato sommabile in* (a, b).

Detti $w_1, w_2, \ldots, w_n$ n integrali indipendenti dell'equazione

$$w^{(2n)} - (-1)^{n+p} w^{(2p)} = 0,$$

nulli con le prime $n-1$ derivate per $x = 0$, si indichi con $\xi_{n,p}$ l'estremo superiore dell'insieme dei valori positivi di x, per cui risulta diverso da zero il wronskiano $W[w_1, w_2, \ldots, w_n]$.

Ciò posto, verrà ora provato che:

B) *La quantità* $\xi_{n,p}$ *è sempre finita e il minimo del rapporto* (1) *è dato da*

$$(3)\qquad \left(\frac{\xi_{n,p}}{b-a}\right)^{2(n-p)}.$$

Per il momento, si fisserà un numero finito $\lambda_{n,p}$ non superiore a (3) e si porrà

$$(4)\qquad u_i(x) = w_i\left[\lambda_{n,p}^{\frac{1}{2(n-p)}}(x-a)\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

cosicchè le n funzioni $u_i(x)$ verificheranno l'equazione

$$(5)\qquad D_{n,p} u_i = u_i^{(2n)} - (-1)^{n+p} \lambda_{n,p} u_i^{(2p)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

e le condizioni

$$(6)\qquad \begin{gathered} u_i(a) = u_i'(a) = \ldots = u_i^{(n-1)}(a) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ W[u_1, u_2, \ldots, u_n] \neq 0, \qquad a < x < b. \end{gathered}$$

Le funzioni (4) e una qualsiasi $z(x)$ sottoposta alle ipotesi enunciate in A) sono legate, in ogni caso, da un'identità, che conduce immediatamente alla proposizione B).

2. Prima però di procedere alla dimostrazione di codesta identità, sarà opportuno osservare alcune relazioni a cui soddisfano le u_i.

Si noti anzitutto che dalle (5) si deduce

$$\begin{vmatrix} u_i & u_i^{(2n)} \\ u_j & u_j^{(2n)} \end{vmatrix} - (-1)^{n+p}\lambda_{n,p} \begin{vmatrix} u_i & u_i^{(2p)} \\ u_j & u_j^{(2p)} \end{vmatrix} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ma il primo membro di questa eguaglianza non è altro che la derivata dell'espressione

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \begin{vmatrix} u_i^{(k)} & u_i^{(2n-k-1)} \\ u_j^{(k)} & u_j^{(2n-k-1)} \end{vmatrix} - (-1)^{n+p}\lambda_{n,p} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \begin{vmatrix} u_i^{(k)} & u_i^{(2p-k-1)} \\ u_j^{(k)} & u_j^{(2p-k-1)} \end{vmatrix},$$

la quale perciò risulta costante in (a, b); anzi, poichè, per le (6), A_{ij} è zero in a, si vede che è addirittura, identicamente in (a, b),

$$A_{ij} = 0. \tag{7}$$

Si indichi ora con $B_{ij}^{(h)}$ il determinante di ordine $n-2$, che si ottiene cancellando le colonne i-esima e j-esima e la linea h-esima della matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_{n-1}^{(n-2)} \end{Vmatrix}.$$

Sicchè, per quanto ora si è detto, fatta la posizione [1]

$$K_{n,p} = \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h z^{(h-1)} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{(i+j+1)} A_{ij} B_{ij}^{(h)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^{n-h} \begin{vmatrix} u_i \\ u_i' \\ \vdots \\ u_i^{(n-2)} \\ u_i^{(2n-h)} \end{vmatrix} z^{(h-1)} - \lambda_{n,p} \sum_{h=1}^{2p-n+1} (-1)^{p-h} \begin{vmatrix} u_i \\ u_i' \\ \vdots \\ u_i^{(n-2)} \\ u_i^{(2p-h)} \end{vmatrix} z^{(h-1)} + \begin{vmatrix} u_i & z \\ u_i' & z' \\ \vdots & \\ u_i^{(n-2)} & z^{(n-2)} \\ u_i^{(n-1)} & 0 \\ u_i^{(n)} & 0 \end{vmatrix},$$

$\left(\text{dove il } \sum_{i,j=1}^{n} \text{ s'intende preso per tutte le coppie } i, j \text{ con } i < j\right)$, risulterà identicamente

$$K_{n,p} = 0. \tag{8}$$

[1] Nelle formule seguenti indico, per brevità di scrittura, soltanto la i-esima colonna di un determinante, quando le prime n colonne di questo si ottengono dalla i-esima dando successivamente ad i i valori 1, 2, ..., n.

D' altra parte, ponendo

$$\begin{vmatrix} u_i' \\ u_i'' \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \\ D_{n,p}u_i \end{vmatrix} = M_{n,p} \qquad \begin{vmatrix} u_i & 0 \\ u_i' & z' \\ \vdots & \\ u_i^{(n-1)} & z^{(n-1)} \\ D_{n,p}u_i & 0 \end{vmatrix} = R_{n,p}$$

si avrà pure identicamente

$$(9) \qquad M_{n,p}=0, \quad R_{n,p}=0,$$

poichè, per le (5), sono nulli tutti gli elementi dell' ultima linea di codesti due determinanti.

3. Ora, come caso particolare di una relazione che ho data nella nota citata in (³), si può scrivere che

$$z^{(n)^2} - \lambda_{n,p} z^{(p)^2} + \frac{M_{n,p}z^2 + (-1)^n R_{n,p} z}{W[u_1, u_2, \dots, u_n]} + \frac{W[u_1, u_2, \dots, u_n, z]}{W[u_1, u_2, \dots, u_n]^2} K_{n,p} =$$

$$(10) \qquad = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(n+k)} \frac{\begin{vmatrix} u_i & z \\ u_i' & z' \\ \vdots & \vdots \\ u_i^{(n-1)} & z^{(n-1)} \\ u_i^{(2n-k-1)} - (-1)^{n+p}\lambda_{n,p}u_i^{(2p-k-1)} & 0 \end{vmatrix}}{W[u_1, u_2, \dots, u_n]} z^{(k)}\right] +$$

$$+ \left\{ \frac{W[u_1, u_2, \dots, u_n, z]}{W[u_1, u_2, \dots, u_n]} \right\}^2.$$

Pertanto, se si suppone che la funzione z verifichi le condizioni enunciate in A), la (10) si potrà moltiplicare per dx e integrare da a a b; l' integrale del secondo membro sarà nullo, per le (2), onde, tenendo conto delle (8) e (9), si otterrà

$$(11) \qquad \int_a^b z^{(n)^2} dx - \lambda_{n,p} \int_a^b z^{(p)^2} dx = \int_a^b \left\{ \frac{W[u_1, u_2, \dots, u_n, z]}{W[u_1, u_2, \dots, u_n]} \right\}^2 dx.$$

Questa è l' identità dalla quale, come si è detto, discende subito la proposizione B); infatti dalla (11) segue che il rapporto (1) è $\geqq \lambda_{n,p}$; e quindi, in primo luogo, $\zeta_{n,p}$ è finito, chè altrimenti $\lambda_{n,p}$ si potrebbe scegliere grande a piacere e il rapporto (1) non sarebbe mai finito [1], in secondo luogo si vede che il rapporto (1) è $=\lambda_{n,p}$ soltanto quando $u_1, u_2, \ldots, u_n, z$ non sono linearmente indipendenti in (a, b), o, ciò che è lo stesso data la lineare indipendenza di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, quando z è una combinazione lineare a coefficienti costanti di $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

D'altra parte, questo caso può presentarsi, solo se il wronskiano di $u_1, u_2, \ldots, u_n$ si annulla in b, date le condizioni che in b è tenuta a soddisfare la $z(x)$, onde dovrà essere $\lambda_{n,p}=\left(\frac{\xi_{n,p}}{b-a}\right)^{2(n-p)}$, affinchè possa annullarsi il secondo membro della (11), e ciò prova del tutto la proposizione B).

4. Si noti che la (10) sussiste, nei punti in cui $W[u_1, u_2, \ldots, u_n] \neq 0$, indipendentemente dal fatto che le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ verifichino le (5) e (6) e che la z verifichi le (2). Queste condizioni sono servite, nel ragionamento ora compiuto, soltanto a far passare dalla (10) alla (11): ma, com'è subito visto, anche in condizioni molto meno restrittive per le u_i e z, la (11) riuscirebbe una conseguenza della (10).

In base a quest'osservazione, si potrebbe estendere il teorema di minimo B) al caso in cui si facciano ipotesi più generali sulla $z(x)$: ma, per amor di brevità, non mi fermerò su questo punto: mi limiterò soltanto a notare alcune disuguaglianze che sussistono fra le $\lambda_{n,p}$ definite da

$$\lambda_{n,p}=\min \frac{\int_a^b z^{(n)2}\,dx}{\int_a^b z^{(p)2}\,dx}, \tag{12}$$

ove si supponga sempre che z verifichi le ipotesi di A).

Detti n, p, q tre numeri interi con $n \geq p \geq q \geq 0$, si possono

[1] È ovvio, invece, che, quando la $z(x)$ verifica le condizioni enunciate in A), il rapporto (1) è sempre finito, purchè $z^{(p)}$ non sia identicamente nulla. Ponendo, p. es., $z(x)=\left|\operatorname{sen}\pi\frac{x-a}{b-a}\right|^n$, si ha:

$$\frac{\int_a^b z^{(n)^2}\,dx}{\int_a^b z^{(p)^2}\,dx}=\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^{2(n-p)}\frac{n^{2n}+\binom{n}{1}^2(n-2)^{2n}+\binom{n}{2}^2(n-4)^{2n}+\ldots}{n^{2p}+\binom{n}{1}^2(n-2)^{2p}+\binom{n}{2}^2(n-4)^{2p}+\ldots}\leq\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^{2(n-p)}.$$

scrivere, accanto alla (12), le altre relazioni

$$
(12') \qquad \begin{cases} \lambda_{n,q} = \min. \dfrac{\int_a^b z^{(n)^2}\,dx}{\int_a^b z^{(q)^2}\,dx}, \\ \\ \lambda_{p,q} \leq \text{estr. inf.} \dfrac{\int_a^b z^{(p)^2}\,dx}{\int_a^b z^{(q)^2}\,dx}, \end{cases}
$$

di cui la seconda è giustificata dal fatto che $\lambda_{p,q}$ è il minimo del rapporto d'integrali al secondo membro, in un campo funzionale più vasto di quello in cui è astretta a variare la $z(x)$. Così pure, per una considerazione analoga, si avrà

$$
(12'') \qquad \lambda_{p,q} \leq \min. \frac{\int_a^b z^{(n)^2}\,dx}{\int_a^b z^{(n-p+q)^2}\,dx}.
$$

Le (12), (12'), (12'') forniscono subito le disuguaglianze cui ho accennato; infatti da (12) e (12') risulta che

$$
\lambda_{n,q} \geq \lambda_{n,p}\lambda_{p,q},
$$

mentre la (12'') equivale a

$$
\lambda_{n,n-p+q} \geq \lambda_{p,q}.
$$

È pure da osservare che, per quanto è detto nella nota a pagina precedente, si ha la limitazione

$$
\lambda_{n,p} \leq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^{2(n-p)} \frac{\sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{n}{k}^2 (n-2k)^{2n}}{\sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{n}{k}^2 (n-2k)^{2p}}, \qquad \begin{cases} \nu = \dfrac{n}{2}, \text{ se } n \text{ è pari} \\ \nu = \dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}
$$

da cui, a più forte ragione, si trae

$$
\lambda_{n,p} \leq \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^{2(n-p)}
$$

com'è stato provato anche da M. JANET, per tutt'altra via, nel caso particolare $p = n - 1$.