Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Enrico Bompiani

Sull'interpretazione proiettiva dell'equazione $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 154–159.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_154_0>

Sull'interpretazione proiettiva dell'equazione $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Si danno varie proprietà geometriche relative all'interpretazione di questa equazione sopra una superficie.*

1. Ho data una interpretazione proiettiva di quest'equazione (che rappresenta le linee autoparallele o cammini di una connessione lineare sopra una superficie) fin dal 1926 ([1]); e qui la ricordo.

Sia data in uno S_3 proiettivo una superficie σ di cui le linee u e v siano le asintotiche (non rettilinee). Ad ogni punto P di una curva $\mathcal{C}$ di σ associo due *quadriche asintotiche osculatrici* individuate dalle tangenti asintotiche dell'uno o dell'altro sistema passanti per P e per due punti ad esso infinitamente vicini su $\mathcal{C}$. Diciamo Q' e Q'' le quadriche costruite rispettivamente con le tangenti asintotiche alle linee u $(dv = 0)$ e v $(du = 0)$: siano t' e t'' quelle relative a P.

La proprietà che caratterizza l'equazione indicata, cioè le sue curve integrali. è questa: *le quadriche* Q' *ad esse relative in* P *toccano tutte una stessa quadrica* Q_1, contenente t' e t'', *in punti non appartenenti a* t' *nè a* t'' *(cioè tagliano* Q_1 *in quadrilateri sghembi di cui fanno parte* t' *e* t''*).* S'intende che altrettanto può dirsi per le Q'' relativamente ad un'altra quadrica Q_2.

2. Aggiungo che data una congruenza di quadriche di cui quella relativa a P contenga le due tangenti asintotiche per P, essa determina *due* equazioni del tipo detto secondo che esse si considerino come quadriche Q_1 o come Q_2: si vede facilmente che questa circostanza permette di definire, a partire da una data equazione, una successione di equazioni trasformate illimitata in due sensi (analoga alla successione di trasformate di LAPLACE). Le equazioni della successione sono completamente determinate da una di esse e dalle *forme elementari* ([2]) di σ invarianti per applicabilità proiettive.

([1]) *Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* « Rend. Acc. Lincei », vol. IV, s. 6, 1926_2. *L'intorno del 2° ordine e i sistemi pluriassiali di una superficie qualsiasi.* « Memorie Accad. Scienze di Bologna », s. VIII, t. IV, 1926-27.

([2]) *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie.* « Boll. Unione Matematica Italiana », anno V, 1926.

3. Ritengo questa interpretazione la più semplice dal punto di vista concettuale perchè traduce per le superficie di S_3 un fatto di natura molto più generale.

Può darsi che altri preferisca la seguente caratterizzazione.

Si consideri la Q' relativa alla curva integrale tangente in P a t'' e precisamente una qualsiasi sua generatrice incidente t' (non in P): questa Q' è una quadrica del fascio di DARBOUX, dipendente unicamente da P.

Ogni altra quadrica Q' relativa a curve integrali dell'equazione in P sega la generatrice scelta in un punto (non appartenente a t'): viceversa per un punto di questa generatrice passano due quadriche Q' relative a due curve integrali in P.

Le tangenti a queste curve in P *descrivono, al variare del punto sulla generatrice, una involuzione le cui coppie sono riferite proiettivamente alla punteggiata descritta dal punto variabile.* Quando questo appartiene a t', la coppia corrispondente di tangenti è data da t' stessa contata due volte.

È possibile scegliere la generatrice in modo che l'involuzione ora detta sia quella delle tangenti coniugate? Sì, ed in un sol modo.

Si vede anzi facilmente che, come la quadrica considerata dipende unicamente da D, questa sua generatrice dipende solo (da D) e da B.

Il coefficiente C determina il punto di essa corrispondente alla tangente t'' (contata due volte) ed A finisce di determinare la proiettività fra la punteggiata e l'involuzione delle tangenti coniugate.

Ne risulta che:

Data per ogni punto P *di* σ *una fra le* ∞^2 *generatrici delle* (∞^1) *quadriche di Darboux incidenti* t' *ed una proiettività fra la punteggiata di cui essa è sostegno e l'involuzione delle tangenti coniugate (con la condizione che al punto comune alla generatrice e a* t' *corrisponda* t' *contata due volte) rimane individuata una equazione del tipo detto.*

S'intende che analoga costruzione può farsi scambiando i due sistemi di asintotiche; sicchè, data l'equazione, per ogni P si hanno due punteggiate, i cui sostegni incontrano rispettivamente t' e t'' riferite proiettivamente, ecc.

Le dimostrazioni si ricavano senza difficoltà dagli sviluppi dati nelle Note citate ed in altre (¹).

(¹) *Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie.* « Math. Zeitschrift », Bd. 20, Heft 5, 1929; *Interpretazione proiettiva di alcune equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine.* « Rend. Lincei »,

4. L'equazione proposta è stata caratterizzata proiettivamente sulle superficie di qualsiasi ambiente (se si vuole anche ad infinite dimensioni; ciò che distingue i vari casi possibili è la dimensione dello spazio 2 = osculatore generico della superficie, cioè contenente l'intorno di 2° ordine di un suo punto generico) ma non, ch'io sappia, nel piano proiettivo.

5. Se interpretiamo $x=u$, $y=v$ come coordinate proiettive non omogenee di un piano, e passiamo a coordinate omogenee x, x_2, x_3 ($x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$) si vede subito che l'equazione

$$y'' = A + By' + Cy'^2 + Dy'^3 \qquad (y' = dy/dx) \tag{1}$$

definisce una *retta singolare* ω (la $x_3=0$) e in ogni punto P che non le appartenga tre tangenti inflessionali r_1, r_2, r_3: mettendole in evidenza la (1) si scrive

$$y'' = D(y'-\alpha_1)(y'-\alpha_2)(y'-\alpha_3) \tag{2}$$

(r_i è la retta determinata da P e da α_i).

Caratterizzarla vuol dire dare un elemento invariante che sia l'equivalente geometrico di D e la costruzione dell'intorno di 2° ordine di una sua curva integrale.

Si riesce a ciò usando di quegli *invarianti proiettivi infinitesimi* (¹) che già mi hanno servito in questioni analoghe. Sia P il punto in esame, t una retta per P e C la curva integrale ivi tangente a t.

6. 1° Caso. — Supposte distinte le rette r_1, r_2, r_3, per P si consideri una retta r per il punto $3 \equiv r_3 \cdot \omega$ (²); siano P_1, P_2, P_t, P_c i suoi pnnti d'intersezione rispettivamente con r_1, r_2, t, C.

Se si fa tendere r *ad* r_3, *il termine principale del logaritmo del birapporto* (P_1, P_2, P_t, P_c) *è un invariante proiettivo infinitesimo che non dipende affatto da* t *(e quindi da* C*) ma solo da* P *e vale*

$$\log(P_1P_2P_tP_c) = D(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)x$$

ove x *è l'ascissa (infinitesima) del punto* P_2, *rispetto a* P, *che serve a fissare* r *(nel fascio di centro* 3*)*.

vol. XI, I, 6, 1930; *Significato proiettivo di alcuni tipi di equazioni differenziali del 2° ordine.* « Annali di Matematica », 1930.

(¹) *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane.* « Rend. Lincei », vol. III, s. 6, 1926; e la mia Appendice II al tomo II della *Geometria Proiettiva Differenziale* di Fubini e Cech (Zanichelli, Bologna, 1926).

(²) In generale indicherò con i il punto d'intersezione di r_i con ω.

Questo invariante equivale dunque alla conoscenza di D e con sole operazioni proiettive è possibile costruire (noto D o *una* curva integrale per P) l'intorno del 2° ordine di P su *qualsiasi* curva integrale con sole operazioni proiettive.

Per avere una costruzione in termini finiti, si sostituisca a C (fino all'intorno del 2° ordine) la conica Γ osculatrice in P passante per 1 e 3. Vale il teorema:

Il birapporto dei punti P_1, P_2, P_t *e* P_r *(ulteriore intersezione di* r *con* Γ*) vale in termini finiti:*

$$(P_1P_2P_tP_r) = 1 + \frac{1}{2} D(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)x$$

ove x *è l'ascissa (non necessariamente infinitesima) di* P_2 *(che con 3 individua* r*).*

Tutte le coniche Γ *osculatrici in* P *alle curve integrali passano per uno stesso punto 2′ di* r_2 *definito da*

$$D(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)x = -2.$$

Oltre al *punto invariante* 2′ se ne hanno altri due 1′ e 3′ (su r_1 e r_3); la retta 1′2′ taglia ω nel punto coniugato armonico di 3 rispetto ad 1 o 2; ecc. Ne segue che:

Date due equazioni

$$y'' = A + By' + Cy'^2 + Dy'^3 \quad \text{e} \quad y'' = \rho(A + By' + Cy'^2 + Dy'^3)$$

si passa in ciascun punto dagli elementi E_2 *di 2° ordine integrali della prima a quelli della seconda con un'omologia che ha centro nel punto, la retta singolare* ω *come asse e invariante assoluto* ρ.

7. Un'altra interpretazione di D si ha nel modo seguente.

Si consideri la curva integrale di (1) che tocca r_2 in P, quindi ha ivi un flesso, e la curva inviluppata dalla rette come r_2 pure passante per P. Si consideri poi una secante s, prossima a P, la quale tagli r_2 in P_2, la curva dotata di flesso in P_F e la curva inviluppata come si è detto in P_1; e sia M un qualunque punto di s (diverso dai precedenti). *Se si fa variare* s *in modo qualsiasi facendo tendere* P_2 *a* P *(con la condizione che sia* $\lim_{P_2 \to P} s \neq r_2$*) ed* M *in modo qualsiasi su* s *(purchè* $\lim_{P_2 \to P} M \neq P$*) il termine principale del birapporto* $(P_F P_1 P_2 M)$ *vale*

$$-\frac{1}{3} D(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)x$$

ove x *è l'ascissa (infinitesima) di* P_2 *rispetto a* P*: esso non dipende affatto dalle posizioni limiti di* s *e di* M.

8. 2° CASO. — Coincidono due delle tangenti inflessionali in ogni P. L'equazione può scriversi:

(3) $$y'' = D(y' - \alpha_1)^2(y' - \alpha_2).$$

La curva integrale in P con tangente r_2 ha ivi un flesso, quella con tangente r_1 ha con essa un contatto quadripunto.

Detta come prima ω la retta singolare e 1 il punto $r_1 \cdot \omega$ e conservando le altre notazioni del n.° 6, *per qualsiasi curva integrale in* P *si ha, a meno di termini di ordine superiore*

$$(P_t P_2 P_c 1) = \frac{1}{2} D(\alpha_2 - \alpha_1)^2 x$$

ove x *è l'ascissa (infinitesima) di* P_2 *(rispetto a* P*).*

Questo *invariante proiettivo* equivale alla conoscenza di D.

Se si prende una secante passante per il punto $2 \equiv r_2 \cdot \omega$ e si procede in modo analogo si ottiene pure un invariante infinitesimo il quale però, a differenza del precedente, dipende dalla curva integrale che si considera per P. Si ha poi:

Le coniche osculatrici alle curve integrali in P *e passanti per i punti* 1 *e* 2 *formano fascio poichè toccano in* 1 *la retta*

$$2 = D(\alpha_2 - \alpha_1)(y - \alpha_1 x):$$

sicchè è possibile appena dato D *o una di esse costruire tutte queste coniche.*

9. Se ripetiamo il procedimento del n.° 7 per la curva integrale tangente ad r_2 otteniamo l'invariante proiettivo infinitesimo

$$-\frac{1}{3} D(\alpha_2 - \alpha_1)^2 x$$

ove x è l'ascissa (infinitesima) di P_2 rispetto a P.

Se invece applichiamo lo stesso procedimento alla curva integrale tangente ad r_1 otteniamo il nuovo invariante

$$\frac{1}{6} D\alpha_1'(\alpha_1 - \alpha_2)x^2$$

ove ora x è l'ascissa (infinitesima) del punto d'intersezione della secante s con r_1 (rispetto a P); anch'esso è indipendente dalla posizione limite di s e di M.

10. 3° CASO. — Se coincidono in ogni P le tre tangenti inflessionali, può scriversi

$$y'' = D(y' - \alpha_1)^3.$$

Esiste ancora la retta singolare ω.

Le coniche osculatrici in P *alle curve integrali e passanti per il punto* $1 \equiv r_1 \cdot \omega$ *si osculano ivi.*

Il procedimento del n.° 7 applicato alla curva integrale tangente in P ad r_1 porta all'invariante proiettivo infinitesimo

$$-\frac{1}{10} D\alpha_1'^2 x^3$$

essendo x l'ascissa (infinitesima) del punto d'intersezione della secante s con r_1 (rispetto a P).