Giuseppe Usai

Sulle variazioni di un vitalizio continuo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 141–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_141_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sulle variazioni di un vitalizio continuo.

Nota di GIUSEPPE USAI (a Catania).

Sunto. - *La conoscenza di un vitalizio continuo, perpetuo relativo ad un'età* x *e ad un tasso* δ *permette di dedurre il vitalizio relativo ad un'età* x' *e ad un tasso* δ', *le due quantità* x', δ' *essendo l'una fissata e l'altra determinabile con un'equazione di primo grado.*

1. In un regime di capitalizzazione composta a tasso istantaneo costante δ, se si conosce il vitalizio (valore attuale) continuo, perpetuo, unitario $\bar{a}_x$ relativo ad un'età x (x, δ assegnati) si può dedurre facilmente il vitalizio $\bar{a}_x'$ relativo ad un'età x' e ad un tasso δ', le due quantità x', δ' essendo una fissata e l'altra determinabile con un'equazione di primo grado.

Tale proprietà, quando la legge di sopravvivenza sia quella DE MOIVRE generalizzata [1]

$$l(x) = (\omega - x)^m$$

(ω, età estrema) è stata dimostrata dal signor ACHARD [2] mentre per la legge:

$$l(x) = e^{-kx}(\omega - x)^m \tag{1}$$

si ha una affermazione diretta [3] del signor POTERIN DU MOTEL [4] confermata poi coi simboli di commutazione dal signor BALU [5].

[1] RICHARD, *Théorie Mathématique des Assurances.* 2ª édition, tome I, pag. 225, Gaston Doin, Paris, 1922.

[2] ACHARD, *Note sur le changement de taux dans le calcul des Annuités viagères.* (Tome III du « Bulletin de l'Institut des Actuaires français »).

[3] Si può osservare che la (1) ha rispetto alla $(\omega - x)^m$ un rapporto analogo a quello che la legge di MAKEHAM ha rispetto alla legge di GOMPERTZ.

[4] POTERIN DU MOTEL, *Théorie des assurances sur la vie.* Pag. 201, Paris, 1899.

[5] Il POTERIN DU MOTEL dimostra che se la proprietà ACHARD sussiste per una funzione di sopravvivenza qualsiasi $l(x)$, sussiste pure per la funzione $e^{-kx}l(x)$.

Questi Autori però non considerano, per quanto io sappia, il caso più generale di un vitalizio di durata qualsiasi t: a tal caso mi riferirò in questa breve Nota e dimostrerò, servendomi della funzione di sopravvivenza (1), che la conoscenza del vitalizio $\bar{a}(x, t)$ relativo ad una età x ad una durata t e ad un tasso δ, (x, t, δ assegnati) permette di dedurre il vitalizio $\bar{a}'(x', t)$ relativo alle quantità x', t', δ' delle quali una si può fissare, mentre le altre due sono determinabili in modo lineare (unica coppia di soluzioni).

2. La dimostrazione si basa sul calcolo dell'integrale:

$$\bar{a}(x, t) = \int_0^t \frac{l(x+u)}{l(x)} e^{-\delta . u} du$$

con δ costante ed $l(x)$ determinata dalla (1).

Troviamo facilmente:

$$\bar{a}(x, t) = \frac{1}{(\omega - x)^m} \int_0^t (\omega - x - u)^m e^{-(k+\delta)u} du$$

ossia:

$$\bar{a}(x, t) = \frac{1}{(\omega - x)^m e^{(k+\delta)(\omega - x)}} \int_0^t (\omega - x - u)^m e^{-(k+\delta)(u+x-\omega)} du.$$

Se si fà uso della trasformazione di variabile:

$$(\delta + k)(\omega - x - u) = \rho$$

si perviene alla espressione:

$$\bar{a}(x, t) = \frac{1}{(\omega - x)^m (\delta + k)^{m+1} e^{(k+\delta)(\omega - x)}} \int_{(\delta+k)(\omega - x - t)}^{(\delta+k)(\omega - x)} \rho^m e^\rho d\rho$$

e quindi alla:

$$(\delta + k)\bar{a}(x, t) = \frac{1}{e^{(\delta+k)(\omega - x)}[(\delta + k)(\omega - x)]^m} \int_{(\delta+k)(\omega - x - t)}^{(\delta+k)(\omega - x)} \rho^m e^\rho d\rho.$$

Risulta dunque che il prodotto $(\delta + k)\bar{a}(x, t)$ è funzione delle due quantità:

$$(\delta + k)(\omega - x - t), \quad (\delta + k)(\omega - x).$$

Perciò se il tasso δ, l'età x, la durata t sono mutate rispettivamente in δ', x', t' in modo che siano verificate le condizioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} (\delta + k)(\omega - x) = (\delta' + k)(\omega - x') \\ (\delta + k)(\omega - x - t) = (\delta' + k)(\omega - x' - t') \end{cases}$$

e se si indica con $\bar{a}'(x', t')$ il nuovo vitalizio sussisterà l'uguaglianza:

$$(\delta + k)\bar{a}(x, t) = (\delta' + k)\bar{a}'(x', t').$$

Si può quindi scrivere:

$$\bar{a}'(x', t') = \frac{\delta + k}{\delta' + k}\bar{a}(x, t) \tag{3}$$

e tale relazione permette di dedurre un vitalizio dall'altro in conformità a quanto si era asserito prima.

3. È bene osservare che il sistema (2) può anche porsi nella forma:

$$\left\{\begin{array}{l}(\delta + k)(\omega - x) = (\delta' + k)(\omega - x') \\ (\delta + k)t = (\delta' + k)t'.\end{array}\right. \tag{4}$$

Ora essendo x, t, δ assegnati, se si suppone $t \neq \omega - x$ le (4) risultano due relazioni fra le tre quantità x', t', δ'. Di queste, come si vede, basta conoscerne una sola per dedurre linearmente le altre due.

Se invece si suppone $t = \omega - x$ dovrà esser necessariamente $t' = \omega - x'$ e viceversa. I due vitalizi in tal caso risultano entrambi perpetui ed il sistema (4) si riduce all'unica equazione:

$$(\delta + k)(\omega - x) = (\delta' + k)(\omega - x')$$

la quale lega le due quantità x', δ' e di queste basta fissarne una per determinare l'altra.

L'espressione (3) viene poi sostituita da una relazione del tipo:

$$\bar{a}'(x') = \frac{\delta + k}{\delta' + k}\bar{a}(x).$$

Si ritrovano in tal modo i risultati di Poterin Du Motel per $k \neq 0$ e di Achard per $k = 0$.

4. La proprietà generale dimostrata riduce i calcoli nella costruzione di tabelle di vitalizi corrispondenti alle diverse età, alle durate ed ai tassi.

A tal uopo si può notare che per le (4) la relazione (3) può anche scriversi nelle forme:

$$\bar{a}'(x', t') = \frac{\omega - x'}{\omega - x}\bar{a}(x, t) \tag{5}$$

$$\bar{a}'(x', t') = \frac{t'}{t}\bar{a}(x, t). \tag{6}$$

I vantaggi delle espressioni (3), (5), (6), sempre tenendo presenti le (4), sono rispettivamente i seguenti:

a) Se si fissa un valore δ per il tasso e si ha una tabella dei vitalizi corrispondenti a questo tasso, a tutte le età x ed alle durate t, l'uso della (3) permette di costruire la tabella dei vitalizi corrispondenti ad un altro valore qualsiasi δ' del tasso.

b) Se si fissa un'età x e si ha la tabella dei vitalizi corrispondenti a questa età ed a tutte le durate t ed ai tassi δ, l'uso della (5) permette la costruzione della tabella dei vitalizi corrispondenti ad un'altra età qualsiasi x'.

c) Se si fissa una durata t e se si ha la tabella dei vitalizi relativi a questa durata ed tutte le età x ed ai tassi δ mediante la (6) si può determinare la tabella dei vitalizi relativi ad un'altra durata qualsiasi t'.

Infatti nel caso *a)* si conoscono δ e δ' e si leggono nella tabella data i valori x e t. Risulta quindi determinato il secondo membre della (3) ossia il vitalizio $a'(x', t')$ relativo al tasso δ' noto ed alla età x' e durata t' che si ricavano dalle (4).

Un ragionamento analogo si può fare per i casi *b)* e *c)*.

5. L'impiego delle tre espressioni citate, indipendentemente l'una dall'altra, porta alla determinazione di tutti i vitalizi: l'unico elemento variabile è il senso della costruzione. Si potrebbe dire che questa procede nel senso dei tassi, delle età, delle durate secondochè si usino rispettivamente le relazioni (3), (5), (6).

Per ultimo può notarsi che l'Achard e il Du Motel nella considerazione dei vitalizi perpetui hanno proceduto nel senso dei tassi.