Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Pacifico Mazzoni

Sul metodo d'interpolazione di Tchebychev

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 132–141.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_132_0>

Sul metodo d'interpolazione di Tchebychev.

Nota di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

Sunto. - *Esponiamo un metodo per giungere, per successive approssimazioni, ad ottenere il polinomio di grado* n *di* TCHEBYCHEV, *relativo a una data funzione, in un dato intervallo. Diamo anche un criterio per stabilire l'approssimazione conseguita con un dato polinomio intermedio; rendendo più pratica la ricerca.*

1. **Preliminari.** — Data una funzione reale e continua $f(x)$, la ricerca del polinomio $P(x)$, di grado $\leq n$, di approssimazione minima in un intervallo $\alpha\beta$, equivale alla risoluzione del sistema di equazioni indicato al n.º 67, pag. 89 dell'Opera del DE LA VALLÉE POUSSIN: *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, Gauthier-Villars, 1919). La risoluzione di tale sistema presenta generalmente tali difficoltà pratiche, da rendere sconsigliabile il calcolo di $P(x)$ per questa via.

In questa Nota esponiamo un metodo, il quale pur avendo interesse dal punto di vista teorico, fa compiere un notevole passo verso la praticità della ricerca. Costruiremo una successione di polinomi

$$(1) \qquad Q_1(x), \quad Q_2(x), \quad Q_3(x), \ldots$$

avente come limite $P(x)$, e che ordinariamente, se verrà scelto opportunamente il primo polinomio Q_1 (nel modo che vedremo al n.º 5), tenderà rapidamente a $P(x)$. Anzi vedremo in alcuni esempi che il calcolo di uno o due termini della successione (1) ci condurrà a un risultato così vicino a $P(x)$, che sarà inutile continuare la ricerca.

2. **La successione $Q_1, Q_2, \ldots$** — Scegliamo $n+2$ numeri a piacere dell'intervallo $\alpha\beta$, siano essi $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$, in ordine crescente e distinti [1]. Cerchiamo il polinomio

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

[1] Sulla scelta di questi punti poniamo l'unica condizione che il polinomio di grado n che nei punti $y_0, \ldots, y_n$ assume rispettivamente i valori

di minima approssimazione ρ_1 ***sul sistema di punti scelti*** $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$, risolvendo il sistema di $n+2$ equazioni lineari nelle $n+2$ incognite $b_0, b_1, \ldots, \sigma$:

$$\text{(II)} \qquad f(y_i) = b_0 + b_1 y_i + \ldots + b_n y_i^n + (-1)^i \sigma.$$

Sarà $\rho_1 = |\sigma|$ il valore di tale approssimazione ([2]), e risulterà $\rho_1 \neq 0$, per la condizione che si è posta sui numeri y_i, indicata nella nota ([1]).

Ora consideriamo la differenza $f(x) - Q_1(x)$; se il suo massimo valor assoluto tra α e β è proprio ρ_1, allora $Q_1(x)$ coincide con $P(x)$, e in tal caso la ricerca è compiuta (per il teorema alla fine del n.° 56, pag. 78 dell'Opera citata del DE LA VALLÉE POUSSIN).

In caso contrario, vi sarà qualche punto x in cui la quantità $|f(x) - Q(x)|$ sia $> \rho_1$. Allora potremo scegliere $n+2$ punti $z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}$, nei quali gli scarti $f(x) - Q_1(x)$ risultino di segno alternato, siano tutti numericamente $\geq \rho_1$, e tali che uno almeno di essi risulti in valore assoluto $> \rho_1$ ([3]). Partiamo da codesto nuovo sistema di punti z_i, e costruiamo il polinomio $Q_2(x)$ di minima approssimazione su essi punti; e diciamo ρ_2 il valore di quest'approssimazione.

Cerchiamo indi dei punti $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$, nei quali gli scarti $f(x) - Q_2(x)$ siano di segno alternato, siano numericamente $\geq \rho_2$, e tali che uno di essi almeno sia numericamente $> \rho_2$. Partendo da quest'ultimo sistema di punti u_i costruiremo analogamente il polinomio $Q_3(x)$ di minima approssimazione ρ_3 su di essi; e così continueremo, ottenendo una successione di polinomi $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ dedotti ognuno dal precedente, allo stesso modo come si è ottenuto Q_2 da Q_1.

$f(y_0), \ldots, f(y_n)$, risulti invece $\neq f(y_{n+1})$ nel punto y_{n+1}: condizione alla quale è sempre possibile soddisfare, a meno che $f(x)$ non sia esso stesso un polinomio di grado n: caso che naturalmente escludiamo.

([2]) Vedasi mia Nota: *Sui polinomi di approssimazione minima* (« Boll. dell'Unione Matematica Italiana »; Bologna, 1930). In essa ho ricordato alcune note proprietà dei polinomi di TCHEBYCHEV, e ne ho dimostrate altre, che ci serviranno appunto nella presente ricerca.

Non sarà inutile osservare che la risoluzione del sistema (II) è in pratica assai meno faticosa di quella del sistema che si otterrebbe, se si volesse seguire, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati; perchè qui è possibile ricondursi al calcolo di determinanti del tipo di VANDERMONDE.

([3]) Ad esempio si potrà fare così: se ξ è un punto tale che risulti $|f(\xi) - Q_1(\xi)| > \rho_1$, e se (poniamo) ξ è compreso fra y_1 e y_2, allora basterà scegliere gli $n+2$ punti $y_0, \xi, y_2, \ldots, y_{n+1}$ oppure i punti $y_0, y_1, \xi, y_3, \ldots, y_{n+1}$ secondochè lo scarto $f(\xi) - Q_1(\xi)$ ha lo stesso segno di $f(y_1) - Q_1(y_1)$, o di $f(y_2) - Q_1(y_2)$

Se questa successione ha un numero finito di termini, allora l'ultimo di essi sarà il polinomio cercato $P(x)$ di minima approssimazione ρ *su tutto l'intervallo* $\alpha\beta$. Resta dunque da occuparci unicamente del caso che essa abbia infiniti termini. Intanto dimostriamo:

I numeri $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ *vanno sempre crescendo.*

Infatti ρ_2 è dato dalla nota formola (6) del n.° 4 della mia Nota citata:

$$\rho_2 = \frac{|A_0 r_0 + A_1 r_1 + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}|}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}, \tag{1}$$

dove r_i rappresenta la quantità $(-1)^i \cdot [f(z_i) - Q_1(z_i)]$. Siccome i numeri r_i sono per ipotesi tutti di uno stesso segno, e tutti numericamente $\geq \rho_1$, e uno di essi almeno $> \rho_1$, segue dalla (1) che ρ_2 è $> \rho_1$. Analogamente è $\rho_3 > \rho_2$, e così via. C. d. d.

Ne consegue che *la successione (monotona)* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ *se ha infiniti termini, ammette un limite* ρ' *(notoriamente* $\leq \rho$*).*

3. **Teorema sulle approssimazioni successive.** — Ora dimostriamo che *se la successione* (I) *ha infiniti termini, essa ha per limite precisamente* P(x), *purchè i numeri* $z_0^{(i)}, z_1^{(i)}, \ldots, z_{n+1}^{(i)}$ *siano stati scelti in modo che uno degli scarti assoluti* $|f(z_s^{(i)}) - Q_i(z_s^{(i)})|$ *differisca del massimo valore di* $|f(x) - Q_i(x)|$ *di una quantità* ε_i *tendente a* 0, *al crescere indefinito di* i.

Infatti $Q_i(x)$ è il polinomio di minima approssimazione ρ_i su un certo sistema di punti $y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{n+1}^{(i)}$, mentre nel corrispondente sistema di punti $z_0^{(i)}, z_1^{(i)}, \ldots, z_{n+1}^{(i)}$ gli scarti $f(x) - Q_i(x)$ (che chiamiamo ordinatamente $r_0, -r_1, +r_2, \ldots$) sono alternativamente positivi e negativi, e numericamente $\geq \rho_i$, ecc. Allora il polinomio Q_{i+1} di minima approssimazione sui punti $z^{(i)}$ ha l'approssimazione ρ_{i+1} (sugli stessi punti) data dalla formola:

$$\rho_{i+1} = \frac{|A_0 r_0 + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}|}{A_0 + \ldots + A_{n+1}}. \tag{2}$$

Chiamiamo M_i il massimo valor assoluto di $|f(x) - Q_i(x)|$. Poniamo, per fissar le idee, che $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ siano tutti positivi; avremo dalla (2):

$$\rho_{i+1} = \frac{A_k r_k}{A_0 + \ldots + A_{n+1}} + \\ + \frac{A_0 r_0 + \ldots + A_{k-1} r_{k-1} + A_{k+1} r_{k+1} + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}}{A_0 + \ldots + A_{n+1}}.$$

Ma i numeri r_0, $r_1, \ldots$ sono tutti $\geq \rho_i$, onde si ha:

$$\rho_{i+1} \geq \frac{A_k r_k}{A_0 + \ldots + A_{n+1}} + \rho_i \frac{A_0 + \ldots + A_{k-1} + A_{k+1} + \ldots + A_{n+1}}{A_0 + \ldots + A_{n+1}},$$

ossia:

$$\rho_{i+1} - \rho_i \geq \frac{A_k(r_k - \rho_i)}{A_0 + \ldots + A_{n+1}},$$

vale a dire:

$$r_k - \rho_i \leq \frac{(A_0 + \ldots + A_{n+1})(\rho_{i+1} - \rho_i)}{A_k}. \tag{3}$$

Ora al crescere indefinito di i, la differenza $\rho_{i+1} - \rho_i$ tende a 0 (perchè la successione ρ_1, $\rho_2, \ldots$ ammette un limite), mentre A_k resta superiore a una quantità fissa (n.° 4 della mia nota citata); segue dalla (3) che la differenza $r_k - \rho_i$ tende a 0. Allora, siccome r_k indica uno qualunque dei numeri r_0, $r_1, \ldots, r_{n+1}$, per l'ipotesi fatta avremo che la differenza $M_i - \rho_i$ tende a 0, al crescere indefinito di i; e allora, pel teorema del n.° 5 della suddetta nota, concluderemo che Q_i tende a P. C. d. d.

4. Esempio. — Abbiamo così dimostrato che con questo metodo si perviene al polinomio cercato $P(x)$, di approssimazione minima su *tutto* l'intervallo $\alpha\beta$.

Come esempio, consideriamo la funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo 0, 1. Se cerchiamo il polinomio di Tchebychev di 2° grado, abbiamo, col metodo del n.° 67 dell'Opera citata del De La Vallée Poussin, omettendo per brevità i calcoli:

$$P(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{9}{16} x + \frac{1}{32};$$

e i quattro punti sui quali viene raggiunto il massimo scarto ρ, sono:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{4}; \quad x_2 = \frac{3}{4}; \quad x_3 = 1;$$

inoltre si ha: $\rho = 1 : 32 = 0{,}03125$.

Seguiamo invece il metodo del n.° 2, partendo dal sistema di punti (equidistanti):

$$y_0 = 0; \quad y_1 = \frac{1}{3}; \quad y_2 = \frac{2}{3}; \quad y_3 = 1.$$

Si ottiene come polinomio $Q_1(x)$ di approssimazione minima su di essi:

$$Q_1(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{5}{9} x + \frac{1}{36},$$

e risulta: $\rho_1 = 1 : 36 = 0{,}0277\ldots$. Allora cerchiamo i punti interni a $(0 ; 1)$ nei quali $|f - Q_1|$ è massima. Risolvendo l'equazione $f'(x) - Q_1'(x) = 0$, otteniamo le due radici:

$$z_1 = (9 - \sqrt{21}) : 18 = 0{,}2454\ldots; \quad z_2 = (9 + \sqrt{21}) : 18 = 0{,}7546\ldots;$$

le quali, come si vede, sono vicinissime ai valori di x_1 e x_2. E se si cerca il successivo polinomio Q_2 partendo dal nuovo sistema di punti 0, z_1, z_2, 1, si ottiene $\rho_2 = 0{,}031245\ldots$, che è vicinissimo a ρ. Dunque in questo esempio è bastato calcolare due soli termini della successione (I) (4).

5. **Scelta del sistema iniziale di punti $y_0, y_1, \ldots y_{n+1}$.** — La questione più importante che ci resta da risolvere ora è la ricerca del sistema iniziale di valori y_i, dal quale convenga partire, per costruire il primo termine Q_1 della successione (I).

Anzitutto se la funzione da approssimare è un polinomio $F(x)$ di grado $n+1$, col coefficiente di x^{n+1} uguale ad a, allora è noto che il polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$, di approssimazione minima nell'intervallo $\alpha - h$, $\alpha + h$, è il seguente:

$$\text{(III)} \qquad P(x) = F(x) - \frac{ah^{n+1}}{2^n} \cdot \cos (n+1) \operatorname{arc} \cos \frac{x - \alpha}{h},$$

che la corrispondente approssimazione è $\rho = ah^{n+1} : 2^n$, e che gli $n+2$ punti sui quali viene raggiunta tale approssimazione ρ sono i seguenti:

$$\text{(IV)} \qquad x_k = \alpha - h \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (\text{per } k = 0, 1, \ldots, n+1) \ (5).$$

Orbene, in generale per una funzione qualunque continua $f(x)$ *assumeremo precisamente codesti valori* (IV) *come sistema iniziale di punti* $y_0, \ldots, y_{n+1}$ *per la costruzione del primo polinomio* Q_1 (di

(4) Se invece s'interpola la funzione data $y = x^3$, ad esempio, con la parabola $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, la quale passa per i 3 punti $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$, $(1; 1)$, si ha come massimo scarto assoluto: $\sqrt{3} : 36 = 0{,}0482$.

(5) Infatti la differenza $F(x) - P(x)$, a causa della (III), assume il suo massimo valore numerico $ah^{n+1} : 2^n$, con segno alternato, negli $n+2$ punti (IV). Vedasi S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales, ecc.* (Collezione Borel), n. 3, pag. 6. Ricordiamo che il coefficiente del termine di grado $n+1$ nel polinomio $\cos (n+1) \operatorname{arc} \cos \frac{x - \alpha}{h}$ è $2^n : h^{n+1}$.

approssimazione minima ρ_1 sul sistema stesso). Così avremo anche il vantaggio che ρ_1 *si potrà ottenere dalla formola semplicissima:*

$$\text{(V)} \qquad \rho_1 = \frac{a h^{n+1}}{2^n} \cdot \left[\frac{1}{2} f(y_0) - f(y_1) + f(y_2) - \ldots \pm \frac{1}{2} f(y_{n+1})\right] \quad (^6).$$

Inoltre ricordiamo che sarà:

$$\rho_1 = \frac{|f^{(n+1)}(\eta)| \cdot h^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n} \quad (^7).$$

Così se si cerca la retta di approssimazione minima fra α e β, si assumerà:

$$y_0 = \alpha; \quad y_1 = (\alpha + \beta) : 2; \quad y_2 = \beta.$$

Posto $Q_1(x) = b_0 + b_1 x$. si ha:

$$b_1 = [f(\beta) - f(\alpha)] : (\beta - \alpha),$$

ecc. L'errore ρ_1 è della forma: $\frac{(\beta - \alpha)^2}{16} \cdot |f''(\xi)|$. Invece se s'interpola col metodo delle parti proporzionali, il massimo errore è notoriamente: $\frac{(\beta - \alpha)^2}{8} \cdot |f''(\xi)|$.

Ci resterà da stabilire un criterio per riconoscere se un dato termine ottenuto Q_r della successione (I) è abbastanza vicino a P: vale a dire per trovare il massimo scarto $|f - Q_r|$ tra α e β: ciò che faremo al numero seguente.

6. **Criterio per stabilire l'approssimazione ottenuta con un dato polinomio Q.** — Considerato in generale un polinomio $Q(x)$, di grado $\leq n$. che dia la migliore approssimazione ρ_1 *su un certo sistema* $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ di $n+1$ punti, chiamiamo M il massimo valor assoluto della differenza $f(x) - Q(x) = \psi(x)$, e dimostriamo che ha luogo il seguente teorema:

Se la derivata $f^{(n+1)}(x)$ *non si annulla mai nell'interno dell'intervallo* $\alpha\beta$, *se poniamo:*

$$\text{(4)} \qquad |f'(y_i) - Q'(y_i)| = \varepsilon_i,$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$, *e se la quantità* ε_i *è minore dei due numeri*

$$\text{(4')} \qquad \frac{2\rho_1}{y_i - y_{i-1}} \quad \text{e} \quad \frac{2\rho_1}{y_{i+1} - y_i}$$

(6) Vedasi l'Opera citata del DE LA VALLÉE POUSSIN, n.° 78, pag. 107, ove si considera però l'intervallo $-1, +1$, anzichè $\alpha - h$, $\alpha + h$.

(7) Vedasi la mia Nota: *Alcune applicazioni dei polinomi di Tchebychev* (« Boll. dell'Unione Matematica Italiana », Bologna, 1929).

(*per* i $=1,\ldots,$ n), *allora nel caso che sia* $y_0=\alpha$ *e* $y_{n+1}=\beta$ *è certo che la differenza* $M-\rho_1$ *è inferiore alla più grande delle* 2n *quantità*

(VI) $$\varepsilon_i(y_i-y_{i-1}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_i(y_{i+1}-y_i).$$

Se invece $y_0\neq\alpha$, *allora* M *è anche* $\leq|f(\alpha)-Q(\alpha)|$: *e se* $y_{n+1}\neq\beta$ *allora è pure* $M\leq|f(\beta)-Q(\beta)|$.

E le stesse limitazioni valgono anche per $\rho-\rho_1$.

Supponiamo dapprima che sia $y_0=\alpha$ e $y_{n+1}=\beta$: che è il caso più importante; e poniamo, per fissar le idee, che il primo scarto $f(y_0)-Q(y_0)$ sia positivo. Osserviamo che la differenza $f-Q=\psi$ ha segno contrario nei due punti y_{i-1} e y_i, e perciò deve annullarsi in un punto intermedio z_i (per $i=1, 2,\ldots, n+1$). Però $\psi(x)$ non può annullarsi in più di $n+1$ punti distinti fra α e β, altrimenti $\psi^{(n+1)}=f^{(n+1)}$ avrebbe una radice fra α e β.

Segue che $\psi(x)$ avrà un massimo nell'estremo sinistro α, poi un minimo in un punto v_1 fra z_1 e z_2, indi di nuovo un massimo in un punto v_2 fra z_2 e z_3 ecc.; e non vi saranno altri massimi o minimi fra α e β, perchè ψ' deve annullarsi negli n punti $v_1, v_2,\ldots, v_n$ e in essi soltanto (altrimenti $\psi^{(n+1)}$ avrebbe una radice fra α e β). Segue che la funzione ψ'' avrà $n-1$ radici fra α e β, e non di più.

Poniamo, per uniformità di notazione, $v_0=\alpha$, e $v_{n+1}=\beta$, e dimostriamo che *nessuna radice di* ψ'' *può capitare nei vari intervalli* y_iv_i (o v_iy_i), per $i=1, 2,\ldots, n$. Infatti supponiamo, al contrario, che vi sia una radice γ di ψ'' fra y_i e v_i e che sia ad esempio $y_i\leq v_i$. Siccome v_{i-1} e v_i sono due radici consecutive di ψ', la ψ'' non può avere altre radici fra v_{i-1} e v_i all'infuori di γ: perciò ψ'' non si annullerà mai fra v_{i-1} e y_i; e quando x varia da v_{i-1} a y_i, la funzione $|\psi'(x)|$ crescerà sempre da 0 a ε_i [8].

Ma per il teorema del valor medio si ha:

$$\psi(y_i)-\psi(v_{i-1})=(y_i-v_{i-1})\cdot\psi'(\xi),$$

essendo ξ un valore intermedio fra v_{i-1} e y_i. Siccome per quello che si è osservato è $|\psi'(\xi)|<\varepsilon_i$, avremo *a fortiori*:

(5) $$|\psi(y_i)-\psi(v_{i-1})|<\varepsilon_i(y_i-v_{i-1}).$$

Ma $|\psi(v_{i-1})|$ è il massimo valore di $|\psi|$ fra z_{i-1} e z_i, ed è $\geq\rho_1$; e siccome $\psi(v_{i-1})$ ha lo stesso segno di $\psi(y_{i-1})$, e il segno contrario di $\psi(y_i)$ [9], avremo evidentemente:

$$|\psi(y_i)-\psi(v_{i-1})|\geq 2\rho_1;$$

[8] Per $i=1$ si dovrà dire che $|\psi'|$ cresce da $|\psi'(\alpha)|$ ad ε_i.

[9] Ricordiamo che v_{i-1} e y_{i-1} sono entrambe comprese fra z_{i-1} e z_i, che sono due radici consecutive di ψ.

onde *a fortiori* dalla (5):

$$(6)\qquad 2\rho_1 < \varepsilon_i(y_i - v_{i-1}).$$

Ora se y_{i-1} è $\leq v_{i-1}$, dalla (6) si deduce *a fortiori*:

$$(7)\qquad 2\rho_1 < \varepsilon_i(y_i - y_{i-1}).$$

Se invece y_{i-1} è alla destra di v_{i-1}, allora invece di partire dalla differenza $\psi(y_i) - \psi(v_{i-1})$, partiremo dall'altra $\psi(y_i) - \psi(y_{i-1})$; siccome nell'intervallo y_{i-1}, y_i (compreso fra v_{i-1}, y_i) valgono le stesse considerazioni su $|\psi'|$, dedurremo pure in questo caso

$$|\psi(y_i) - \psi(y_{i-1})| < \varepsilon_i(y_i - y_{i-1}),$$

da cui segue pure la (7). Ma la (7) è assurda, avendo supposto $\varepsilon_i < 2\rho_i : (y_i - y_{i-1})$; dunque in questo caso non vi può essere alcuna radice di ψ'' fra y_i e v_i.

Analogamente, se $v_i < y_i$. Allora si osserverà invece che nell'intervallo $v_i v_{i+1}$ la ψ'' (che per ipotesi si annulla in un punto γ fra v_i e y_i), non si annullerà mai fra y_i e v_{i+1} e si giungerà allo stesso assurdo. C. d. d.

Proseguiamo: supposto $v_i \leq y_i$, siccome la ψ'' non può annullarsi fra v_i e y_i, segue che $|\psi'|$ cresce sempre da 0 a ε_i, quando x passa da v_i a y_i. Dal teorema del valor medio si ha:

$$\psi(y_i) - \psi(v_i) = (y_i - v_i) \cdot \psi'(\eta),$$

essendo η un valore intermedio fra v_i e y_i. Siccome $|\psi'(\eta)| < \varepsilon_i$, si ha *a fortiori*:

$$|\psi(y_i) - \psi(v_i)| < \varepsilon_i(y_i - v_i).$$

Ma $|\psi(v_i)|$ è il massimo valore M_i di $|\psi|$ fra z_i e z_{i+1}, mentre $|\psi(y_i)| = \rho_1$; siccome $\psi(v_i)$ e $\psi(y_i)$ hanno uno stesso segno, sarà infine:

$$M_i - \rho_1 < \varepsilon_i(y_i - v_i);$$

da cui *a fortiori*:

$$M_i - \rho_1 < \varepsilon_i(y_i - y_{i-1}).$$

Se invece $y_i < v_i$, si ha analogamente $|\psi(v_i) - \psi(y_i)| < \varepsilon_i(y_{i+1} - y_i)$; ossia:

$$M_i - \rho_1 < \varepsilon_i(y_{i+1} - y_i);$$

e ciò per $i = 1, 2, \ldots, n$. Avendo chiamato M il massimo di $|\psi|$ fra α e β, si conclude che la differenza $M - \rho_1$ è minore della più grande fra le $2n$ quantità (VI). E siccome $\rho_1 < \rho < M$ (n.° 2 della mia nota citata a pag. 133), sarà anche $\rho - \rho_1$ inferiore allo stesso numero. C. d. d.

Se infine y_0 è $\neq \alpha$, allora ponendo $c_0 = \alpha$, il ragionamento seguito resta valido, e si conclude che sarà inoltre $M \leq |f(\alpha) - Q(\alpha)|$. Analogamente, se y_{n+1} è $\neq \beta$ [10].

Spesso la sola conoscenza dei valori di $f(x)$ e di $f'(x)$ nei punti *determinati* y_i basta dunque a rendere compiuta la ricerca. In ogni caso però il segno di $f' - Q'$ ci dirà se il valore z_i da scegliere, per la costruzione del successivo polinomio della successione (1), sarà alla destra o alla sinistra del corrispondente valore y_i.

7. **Esempio. Conclusione.** — Vogliamo approssimare la funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ mediante una retta nell'intervallo (0, 1) (problema di PONCELET). Nell'Opera del CASSINIS: *Calcoli numerici, ecc.* (Pisa, Mariotti, 1928), a pag. 565, col notissimo metodo dei momenti è ottenuta la seguente retta:

$$y = 0.93432 + 0.42695x. \tag{8}$$

Cercando invece la retta di approssimazione minima *sul sistema dei tre punti* 0 : 0.5 : 1, abbiamo:

$$y = Q(x) = (3 + \sqrt{5} - \sqrt{2}) : 4 + (\sqrt{2} - 1) \cdot x. \tag{9}$$

ossia:

$$Q(x) = 0.95546 + 0.41421 \cdot x. \tag{9'}$$

mentre $\rho_1 = 0.04454$. La derivata $f''(x)$ è sempre $\neq 0$: inoltre la quantità ε_1 è $= f'(0.5) - Q'(0.5) = 0.0330$; talchè la condizione (4') è soddisfatta, e sarà, per la (VI): $M - \rho_1 \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$, ossia il massimo errore M è certamente < 0.0610.

Con la retta (8) lo scarto nel punto 0 è già $= 0.06568$; sicchè la retta (9), ottenuta per via assai più semplice, dà certamente approssimazione migliore della (8). Anzi cercando il massimo scarto $|f - Q|$ si trova che esso è 0.04518, che *è così vicino a* $\rho_1 = 0.04454$, *che è inutile proseguire la ricerca, per avere il polinomio di approssimazione minima su tutto l'intervallo* 0,1.

Notiamo che qui abbiamo utilizzato tre soli valori di $f(x)$, e uno di f'. Però s'intende che se invece di cercare una retta sola interpolatrice fra 0 e 1, ci fossimo contentati di avere due rette distinte, sarebbe stato preferibile interpolare per parti proporzio-

(10) Il teorema dimostrato resta valido anche se $f^{(n+1)}$ si annulla *nell'interno* dell'intervallo $\alpha\beta$, purchè si sappia che la derivata $\psi'' = f'' - Q''$ abbia non più di $n - 1$ radici nell'interno dell'intervallo $\alpha\beta$, oppure che ψ''' ne abbia non più di $n - 2$, ecc., oppure che $\psi^{(n)}$ ne abbia non più di una.

nali separatamente nei due intervalli 0 : 0,5 e 0,5 ; 1. Tale considerazione ha portata generale.

Concludendo, il metodo esposto è dei più raccomandabili in pratica, per quanto non sia affatto escluso che in taluni casi la sua applicazione possa riuscire laboriosa.