Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Mauro Picone

Sul moto dei gravi nell'atmosfera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 125–132.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

PICCOLE NOTE

Sul moto dei gravi nell'atmosfera.

Nota di Mauro Picone (a Napoli) (*).

3. **La resistenza dipende soltanto dalla grandezza della velocità e ne è funzione crescente e crescente all'infinito.** — Nell'ipotesi ora enunciata il moto di P è caratterizzato dalle equazioni:

$$(12)\qquad \begin{cases} v' = -F(v) - g \operatorname{sen} \theta, \quad \theta' = -g \dfrac{\cos \theta}{v}, \\ v(0) = V, \quad \theta(0) = \varphi. \end{cases}$$

Esistono, determinati, i limiti

$$\lim_{t \to \Lambda} v(t) = w, \quad \lim_{t \to \Lambda} \theta(t) = \omega,$$

ed è

$$(13)\qquad -\pi/2 \leqq \omega < 0.$$

Dico che w è finito e diverso da zero. Se fosse $w = 0$, riuscirebbe $v(t)$ sempre decrescente, laddove dalla prima della (12) e dalla (13) si ricaverebbe $\lim v'(t)(t \to \Lambda) = -g \operatorname{sen} \omega > 0$. Non può essere $w = +\infty$, poichè dalla prima delle (12) si ricaverebbe $\lim v'(t)(t \to \Lambda) = -\infty$ e quindi l'assurdo: $v(t)$ positivamente divergente e decrescente. Esistono dunque due numeri positivi m e M per i quali si ha sempre

$$0 < m \leqq v(t) \leqq M.$$

Ne segue $\Lambda = +\infty$. Ed invero, se fosse Λ finito, dalla $y' = v \operatorname{sen} \theta$ si ricaverebbe $|y(t)| < M\Lambda$, il che è assurdo. Si ha dunque

$$\lim_{t \to \infty} \theta'(t) = -g \frac{\cos \omega}{w}, \quad \lim_{t \to \infty} v'(t) = -F(w) - g \operatorname{sen} \omega,$$

(*) Continuazione, v. num. precedente, pag. 102.

e quindi, poichè anche $\theta(t)$ e $v(t)$ hanno limiti finiti per $t \to \infty$, deve riuscire

$$\omega = -\pi/2, \quad F(w) = g.$$

Onde il teorema:

V. *Nelle ipotesi ora ammesse per la resistenza* [$\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathrm{v})$, *con* $\mathrm{F}(\mathrm{v})$ *positiva per* $\mathrm{v} > 0$, *sempre crescente e crescente all'infinito, risultando determinato e finito il limite di* $\mathrm{F}(\mathrm{v})/\mathrm{v}$ *per* v *infinitesimo*] *l'intervallo in cui è possibile definire la soluzione* (x, y) *delle* (2) *è l'intervallo* $(0, +\infty)$, *e al crescer del tempo all'infinito la grandezza della velocità, mantenendosi diversa da zero e presentando, al più, un solo minimo, tende a quel ben determinato valore* w *per cui è* $\mathrm{F}(\mathrm{w}) = \mathrm{g}$, *laddove l'inclinazione* θ *tende a* $-\pi/2$.

Dal teorema IV e da questo ultimo segue:

VI. *Per ogni angolo di proiezione* $\varphi \geqq 0$, *la grandezza* v *della velocità è sempre dotata di minimo, che riesce minore del valore* w.

Ed invero, per un certo angolo di proiezione $\varphi_0 \geqq 0$, diamo a V un valore $V_0 < w$; la $v(t)$, che è decrescente in un intorno destro dello zero, deve riuscire crescente per valori abbastanza grandi di t, poichè $\lim v(t)$ (per $t \to \infty) = w > v(0)$. Esiste dunque un valore t_{10} per cui $v'(t_{10}, \varphi_0, V_0) = 0$.

Oramai riferiremo il moto di P all'inclinazione θ che varia nell'intervallo $(-\pi/2, \varphi)$, aperto a sinistra, e potremo perciò tenere la sola equazione dell'odografa:

$$\frac{dv}{d\theta} = v \operatorname{tang} \theta + \frac{vF(v)}{g \cos \theta}. \tag{14}$$

Vogliamo considerare $v = v(\theta, \varphi, V)$, come funzione di θ e dei parametri φ e V che fissano le condizioni iniziali. Indichiamo con v_θ, v_φ, v_V le derivate parziali prime di v.

Insieme alla (14) si ha

$$v(\varphi, \varphi, V) = V, \tag{15}$$

onde segue, derivando parzialmente, una prima volta rispetto a V ed una seconda rispetto a φ,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\theta} v_V = \left[\operatorname{tang} \theta + \dfrac{[vF(v)]'}{g \cos \theta}\right] v_V, \\ v_V(\varphi, \varphi, V) = 1, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\theta} v_\varphi = \left[\operatorname{tang} \theta + \dfrac{[vF(v)]'}{g \cos \theta}\right] v_\varphi, \\ v_\varphi(\varphi, \varphi, V) = -v_\theta(\varphi, \varphi, V) = -V \operatorname{tang} \varphi - \dfrac{VF(V)}{g \cos \varphi}. \end{cases} \tag{17}$$

Pertanto, poichè ogni soluzione di un' equazione differenziale del prim' ordine lineare ed omogenea, conserva il segno che ha inizialmente, è sempre

(18) $$v_V(\theta,\ \varphi,\ V) > 0,$$

(19) $$v_\varphi(\theta,\ \varphi,\ V) < 0, \qquad \text{per } \varphi \geqq 0,$$

e quindi:

VII. *Tenuto fisso l'angolo di proiezione* φ, *il valore di* v *in un punto di data inclinazione* θ *è funzione crescente della grandezza* V *della velocità iniziale. Tenuta fissa* V, *il valore di* v *in un punto di data inclinazione* θ *è funzione decrescente di* φ *per* $\varphi \geqq 0$.

Diciamo θ_1 il valore dell' inclinazione a cui compete il minimo di v; θ_1 è definito, in funzione di φ e di V, dall' equazione:

$$-v'(\theta_1,\ \varphi,\ V) = g \operatorname{sen} \theta_1 + F[(v(\theta_1,\ \varphi,\ V)] = 0,$$

e si ha dunque

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial V} = -\frac{F'(v)}{g\cos\theta_1}\frac{\partial v}{\partial V}, \qquad \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi} = -\frac{F'(v)}{g\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi},$$

e pertanto, in virtù delle (18) e (19), si ha il teorema:

VIII. *Tenuto fisso l'angolo di proiezione* $\varphi \geqq 0$, *il valore* θ_1 *dell'inclinazione ove è conseguito il minimo* v_1 *della grandezza della velocità è funzione decrescente di* V, *e* v_1 *è funzione crescente. Tenuta fissa la grandezza* V *della velocità iniziale, il detto valore* θ_1 *è funzione crescente di* φ *e il minimo* v_1 *è funzione decrescente, per* $\varphi \geqq 0$.

4. Deformazione della traiettoria con angolo di proiezione fisso, al variare della grandezza della velocità iniziale. — Fissato l' angolo di proiezione φ, su ogni raggio spiccato dall' origine O, con un' anomalia $\varepsilon < \varphi$, esiste, qualunque sia V, uno ed un solo punto della traiettoria. A questo punto compete l' inclinazione τ definita dall' equazione:

(20) $$\int_\tau^\varphi v^2 \operatorname{tang}\theta\, d\theta - \operatorname{tang}\varepsilon \cdot \int_\tau^\varphi v^2 d\theta = 0,$$

riuscendo

$$\operatorname{tang}\tau < \operatorname{tang}\varepsilon.$$

Vogliamo dimostrare che:

IX. *Tenuto fisso l'angolo di proiezione* φ, *l'inclinazione della traiettoria nel suo punto d'incontro con un raggio spiccato dall'origine di assegnata anomalia* $\varepsilon (< \varphi)$, *è funzione decrescente della grandezza* V *della velocità iniziale, ed ha per limite* $-\pi/2$ *al crescere* *di* V *all'infinito. L'ascissa* x *di detto punto d'incontro è funzione crescente di* V *ed ha per limite infinito.*

Derivando invero la (20) rispetto a V si ricava

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial V}v^2(\sigma)(\operatorname{tang}\varepsilon-\operatorname{tang}\sigma)=-\int_{\varepsilon}^{\sigma}v\frac{\partial v}{\partial V}(\operatorname{tang}\theta-\operatorname{tang}\varepsilon)d\theta,$$

donde, sottraendo dal secondo membro il primo della (20) moltiplicato per una costante k,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial V}v^2(\sigma)(\operatorname{tang}\varepsilon-\operatorname{tang}\sigma)=-\int_{\varepsilon}^{\sigma}(\operatorname{tang}\theta-\operatorname{tang}\varepsilon)\left(\frac{\partial v}{\partial V}-kv\right)v\,d\theta. \tag{21}$$

Diamo a k quel valore positivo per cui riesce:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial V}\right)_{\theta=\varepsilon}-kv(\varepsilon)=0,$$

potendo stabilire che sarà allora

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial V}-kv<0, & \text{per } \theta<\varepsilon,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial V}-kv>0, & \text{per } \theta>\varepsilon,\end{cases} \tag{22}$$

risulterebbe dimostrato che $\partial\sigma/\partial V<0$, poichè la funzione sotto il segno di integrale al secondo membro della (21) riuscirebbe sempre positiva e nulla soltanto per $\theta=\varepsilon$. Ma si ha, in virtù delle (14) e (16),

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial V}-kv\right)=\left(\operatorname{tang}\theta+\frac{vF'+F}{g\cos\theta}\right)\frac{\partial v}{\partial V}-k\left(v\operatorname{tang}\theta+\frac{vF}{g\cos\theta}\right),$$

e quindi, tutte le volte che

$$\frac{\partial v}{\partial V}-kv=0, \tag{23}$$

riesce

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial V}-kv\right)=k\frac{v^2F'}{g\cos\theta}>0.$$

Onde la (23) non può aver luogo che in un unico punto e sussistono le (22).

Per l'ascissa $x(\sigma)$ del punto d'incontro della traiettoria col raggio per O di anomalia ε, si ha poi

$$x(\sigma)=\frac{1}{g}\int_{\sigma}^{\varepsilon}v^2d\theta.$$

e quindi

$$\frac{\partial x}{\partial V}=\frac{2}{g}\int_{\tau}^{\omega} v\frac{\partial v}{\partial V}d\theta-\frac{1}{g}\frac{\partial\tau}{\partial V}v^2(\tau)>0.$$

5. **Ipotesi balistica sulla resistenza.** — Sia ora la resistenza data da

$$F=\delta(y)F^*(v), \tag{24}$$

ove $\delta(y)$ è funzione della sola y, il cui valore rimanga, durante il moto, sempre compreso fra i due numeri positivi δ_1 e δ_2 ($\delta_1<\delta_2$) e $F^*(v)$ funzione della sola v, positiva per $v>0$ e sempre crescente e crescente all'infinito. Anche in tal caso si può assicurare che la grandezza v della velocità rimane pur essa sempre compresa fra due numeri finiti e positivi, che, cioè, posto

$$\lim_{t\to\Lambda}{}' v(t)=w_1,\quad \lim_{t\to\Lambda}{}'' v(t)=w_2,$$

riesce

$$0<w_1\leqq w_2<+\infty. \tag{25}$$

Ed invero, due casi possono presentarsi, o al tendere di t verso Λ la $v(t)$ è definitivamente monotona, oppure essa non è mai definitivamente tale. Nel primo caso, indicato con w il valore comune di w_1 e di w_2, se fosse $w=0$, si avrebbe

$$\lim_{t\to\Lambda}[-\delta(y)F^*(v)-g\,\mathrm{sen}\,\theta]=-g\,\mathrm{sen}\,\omega>0,$$

e quindi, per la prima delle (9), l'assurdo: $v(t)$, per $t\to\Lambda$, positivamente infinitesima e definitivamente crescente; se fosse $w=+\infty$, si avrebbe

$$\lim_{t\to\Lambda}[-\delta(y)F^*(v)-g\,\mathrm{sen}\,\theta]=-\infty,$$

e quindi l'assurdo: $v(t)$ positivamente divergente e definitivamente decrescente. Nel secondo caso si può trovare una successione $t_{11}, t_{12},\ldots, t_{1n},\ldots$, tendente a Λ, di valori di t, per ciascuno dei quali $v(t)$ ha un minimo, ed inoltre $\lim v(t_{1n})$ (per $n\to\infty$) $=w_1$, ed una seconda successione $t_{21}, t_{22},\ldots, t_{2n},\ldots$, pur essa tendente a Λ, di valori di t, per ciascuno dei quali $v(t)$ ha un massimo, ed inoltre $\lim v(t_{2n})$ (per $n\to\infty$) $=w_2$. Posto

$$y(t_{in})=y_{in},\quad v(t_{in})=v_{in},\quad \theta(t_{in})=\theta_{in},\qquad (i=1,2),$$

si ha, per la prima delle (9),

$$\delta(y_{1n})F^*(v_{1n})+g\,\mathrm{sen}\,\theta_{1n}=\delta(y_{2n})F^*(v_{2n})+g\,\mathrm{sen}\,\theta_{2n}=0, \tag{26}$$

e quindi

$$F^*(v_{1n}) \geqq -\frac{g \operatorname{sen} \theta'_{1n}}{\delta_2}, \quad F^*(v_{2n}) \leqq -\frac{g \operatorname{sen} \theta_{2n}}{\delta_1},$$

donde, passando al limite per $n \to \infty$,

$$0 < -\frac{g \operatorname{sen} \omega}{\delta_2} \leqq F^*(w_1) \leqq F^*(w_2) \leqq -\frac{g \operatorname{sen} \omega}{\delta_1} < +\infty,$$

ciò che ha di conseguenza le (25).

In virtù delle relazioni $y' = v \operatorname{sen} \theta$, $\lim y$ (per $t \to \Lambda) = -\infty$, ne segue $\Lambda = +\infty$. Dalla seconda delle (9), poichè — per essere determinato e finito il limite di $\theta(t)$, per $t \to +\infty$ — non potrà risultare negativo il massimo limite della derivata $\theta'(t)$, si trae poi $\omega = -\pi/2$.

Infine, affermo che, se è determinato il limite di $\delta(y)$ per $y \to -\infty$, la grandezza $v(t)$ della velocità ha pur essa un limite determinato per $t \to +\infty$. Ciò occorre dimostrare solo nel caso che la $v(t)$ non sia mai definitivamente monotona, ma in tal caso sussistono le (26), dalle quali si trae appunto

$$F^*(w_1) = F^*(w_2) = \frac{g}{\delta(-\infty)},$$

e quindi anche che il limite di $v(t)$ è quel ben determinato valore w per cui riesce

$$\delta(-\infty) F^*(w) = g. \tag{27}$$

Ciò si deduce anche nel caso che $v(t)$ riesca definitivamente monotona, dovendo allora risultare $\lim v'(t) = \lim [-\delta(y)F(v) - g \operatorname{sen} \theta]$ (per $t \to +\infty) = 0$.

Onde, riassumendo, il teorema:

X. *Nell'ipotesi che la resistenza opposta dall'atmosfera abbia l'espressione* (24), *con* $\delta(y)$ *sempre contenuta fra due limiti* δ_1 *e* δ_2 $(\delta_1 < \delta_2)$ *finiti e positivi e* $F^*(v)$, *positiva per* $v > 0$, *sempre crescente e crescente all'infinito, riuscendo determinato e finito il limite di* $F^*(v)/v$ *per* v *infinitesimo, l'intervallo di tempo in cui è possibile definire la soluzione* (x, y) *delle* (2) *è l'intervallo* $(0, +\infty)$, *la grandezza della velocità vi si mantiene compresa fra due limiti finiti e positivi, ed al crescere all'infinito del tempo l'inclinazione* θ *tende a* $-\pi/2$. *Se, inoltre, è determinato il limite di* $\delta(y)$, *per* $y \to -\infty$, *la grandezza della velocità, al crescere all'infinito del tempo, tende a quel ben determinato valore* w *per cui riesce verificata la* (27). *In ogni caso* [1], *poichè quando* $v'(t) \geqq 0$, *si ha sempre* $F^*(v) \leqq g/\delta_1$,

[1] Cfr. SIGNORINI, *Sulla velocità minima*. (« Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », 2° sem. 1922).

la v *non oltrepassa mai la maggiore fra le quantità* V *e* V_1, *ove* V_1 *è quel valore per cui* $F^*(V_1) = g/\delta_1$.

Con tutto ciò, supposto $\varphi \geqq 0$, nelle attuali ipotesi della Balistica esterna classica, non riesce assicurata, in ogni caso, l'esistenza del minimo della grandezza della velocità, per un valore finito del tempo, esistenza che è sempre invece stata rigorosamente stabilita nelle ipotesi del n.° 3, per le quali la resistenza è solo funzione di quella grandezza. Il teorema precedente assicura il verificarsi di detto minimo quando sia $\varphi \geqq 0$, $V \leqq w$; eppure non vi è traiettoria di proietto — fra le numerosissime calcolate [1] per la compilazione delle tavole di tiro che io ideai e attuai durante la guerra per il tiro delle artiglierie di medio e di grosso calibro in montagna — nelle quali non si constati, nel ramo discendente, poco dopo il vertice, il presentarsi dell'indicato minimo.

Che vi siano leggi di dipendenza della densità $\delta(y)$ dell'aria dalla quota y, molto prossime alla media reale e per le quali, supposto non negativo l'angolo φ di proiezione, detto minimo deve verificarsi, ci si può convincere al modo seguente. Sia $\eta(y)$ una funzione della sola y, definita nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, sempre positiva e sempre crescente, infinitesima per $y \to -\infty$ ed infinitamente grande per $y \to +\infty$ e designino k e $\varkappa$ due costanti positive, ebbene, con la funzione

$$\delta(y) = ke^{-\varkappa\eta(y)},$$

ove si disponga ulteriormente di $\eta(y)$, si può assai bene rappresentare la densità dell'aria in funzione della quota y. Posto dunque

$$F = ke^{-\varkappa\eta(y)}F^*(v), \tag{28}$$

e fissati $\varphi \geqq 0$, $V > 0$, potremo concepire v e v' come funzioni di t e della costante $\varkappa$, ponendo $v = v(t, \alpha)$, $v' = v'(t, \alpha)$. Abbiamo visto, al n.° 3, che esiste un ben determinato valore t_1^0 di t per cui risulta

$$v'(t_1^0, 0) = 0, \quad v''(t_1^0, 0) > 0, \quad v(t_1^0, 0) < w,$$

e pertanto l'elementare teoria delle funzioni implicite ci assicura dell'esistenza di un numero positivo $\bar{\alpha}$ tale che, per $0 \leqq \alpha < \bar{\alpha}$, si può definire una funzione $t_1 = t_1(\alpha)$ della α verificante le relazioni

$$v'[t_1(\alpha), \alpha] = 0, \quad v''[t_1(\alpha), \alpha] > 0, \quad v[t_1(\alpha), \alpha] < w, \quad t_1(0) = t_1^0.$$

[1] Cfr. il mio « Fascicolo IB » delle *Tavole di tiro da montagna (Teoria e metodi di compilazione).* (Comando d'Artiglieria della 6ª Armata, 1918), pp. 9-28 e pp. 128-129.

Nell'ipotesi per la resistenza espressa dalla (28) è così dimostrata, per ogni $z < \bar{z}$, l'esistenza del minimo per la grandezza della velocità.

. . . .