Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Aliprandi

Sugli estremi di corde normali a una linea e a una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 90–95.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_90_0>

Sugli estremi di corde normali a una linea e a una superficie.

Nota di GIUSEPPE ALIPRANDI (a Padova).

Sunto. - *L'A. generalizza, usando la rappresentazione funzionale, un problema di massimo e di minimo trattato prima dal* BONNET *per le corde di una conica e poi dal* MINEO *per le corde di una superficie ordinaria.*

In un recente lavoro pubblicato su questo « Bollettino » (1), il prof. MINEO, richiamate alcune ricerche del BONNET sulle corde di una curva (2), ha estese le stesse considerazioni alle corde di una superficie.

Ecco le questioni trattate da detti Autori.

Data una curva piana (o superficie ordinaria) K, si consideri, per ogni punto A di K una corda AA' di K perpendicolare a K in A: cercare fra queste corde quelle che hanno lunghezza massima o minima.

Le condizioni che per queste corde sono trovate dai detti Autori, conservano la loro forma anche quando invece di considerare una sola curva o superficie, si consideri una curva del piano (superficie dello spazio) K e i segmenti AA' che sono perpendicolari a K in un suo punto generico A e che hanno l'altro estremo A' in un'altra curva piana (o superficie dello spazio) K'.

Nell'esporre questa estensione, cerco di sfruttare i vantaggi che offre la rappresentazione funzionale.

1. Consideriamo due curve K e K' di un piano nello spazio H (3), esse saranno descritte da due determinanti $f = f(t, u)$, $F = F(t, v)$.

Sia A un punto di K, A' un punto di K', tali che la retta AA' sia perpendicolare a K in A. Si avrà $A = f(u)$; $A' = F(v)$. Indicando con δ la distanza AA' si ha

$$\delta^2 = \int_g (f - F)^2 dt, \tag{1}$$

(1) C. MINEO, *Sui massimi e minimi di corde normali a una superficie.* (« Boll. dell'U. M. I. », 1929, VIII, n.° 4, pp. 194-195).

(2) O. BONNET, *Sur les maxima et les minima.* (« Nuov. Ann. de Math. », serie I, vol. II, pp. 420-425).

(3) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano.* Zanichelli ed., Bologna, 1929, p. 72.

e, per l'ipotesi fatta, dovrà essere

(2) $$\int_g (f - F) \cdot f_1 \cdot dt = 0 \qquad \text{con } f_1 = \frac{df}{du}.$$

Questa è una relazione fra le u e le v, dalla quale si potrà ricavare v in funzione di u. Sarà per es. $v = v(u)$. Supporremo che nella zona che si considera, il parametro v sia tale che $F_1 = \frac{dF}{dv}$ sia diverso da zero in tutti i punti (¹).

Con la condizione (2), δ risulta funzione di u ed i suoi estremi sono dove si annulla la derivata di δ rispetto ad u. Derivando la (1) rispetto ad u, tenendo conto della (2) ed eguagliando a zero, si ha

(3) $$\int_g (f - F) \cdot F_1 \cdot \frac{dv}{du} \cdot dt = 0, \qquad F_1 = \frac{dF}{dv},$$

ossia

(4) $$\frac{dv}{du} \cdot \int_g (f - F) \cdot F_1 \cdot dt = 0,$$

che si spezza nelle due

(5) $$\int_g (f - F) \cdot F_1 \cdot dt = 0,$$

e

(6) $$\frac{dv}{du} = 0.$$

Dovrà dunque essere:

Caso α:

$$\int_g (f - F) \cdot F_1 \cdot dt = 0 \quad \text{(con } f \text{ generalmente diverso da } F).$$

Questa condizione esprime che la corda AA' deve essere perpendicolare a K'.

Caso β:

$$f = F \quad \left(\text{da cui consegue } \int_g (f - F) \cdot F_1 dt = 0\right).$$

Questa condizione esprime che i due punti A e A' coincidono.

(¹) Spesse volte questo si ottiene con un solo cambiamento di parametri, appunto perchè è possibile con un cambiamento di parametri fare in modo che in un punto in cui $F_1 \neq 0$ risulti $F_1 = 0$. Così per es. se nel punto v_0 è $F_1 \neq 0$, ponendo $(v - v_0)^2$ al posto di v, si vede che il nuovo F_1 diventa eguale al precedente moltiplicato per $2(v - v_0)$ e quindi si annulla per $v = v_0$.

Caso γ:

$$\frac{dv}{du} = 0.$$

Questa condizione dice che A' sta sul punto di incontro di K' con l'evoluta di K. Difatti dalla (2) si ha, derivando rispetto a u:

$$\int_g \left(f_1 - F_1 \frac{dv}{du}\right) \cdot f_1 \cdot dt + \int_g (f - F) \cdot f_{11} dt = 0 \quad \left(f_{11} = \frac{d^2 f}{du^2}\right)$$

che, nel caso nostro, si riduce a

(7) $$\int_g f_1^2 dt + \int_g (f - F) f_{11} dt = 0.$$

Ora introducendo la lunghezza s di arco della curva, abbiamo

(8) $$f_1 = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{du}, \quad f_{11} = \frac{d^2 f}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \frac{df}{ds} \cdot \frac{d^2 s}{du^2}.$$

Per la (2) e la (1). posso porre

(9) $$F - f = \delta X,$$

dove X è un parametro normale della curva.

Ricordando che l'elemento lineare della curva K è dato da (¹)

(10) $$ds^2 = \int_g f_1^2 dt \cdot du^2,$$

tenendo presenti le (10), (9), (8), la (7) diventa

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 - \delta \int_g X \cdot \frac{d^2 f}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{du}\right)^2 dt = 0.$$

Dividendo per $\left(\frac{ds}{du}\right)^2$ e ricordando che $\frac{d^2 f}{ds^2} = CX$ dove C è la curvatura di K, si ha $1 - \delta C = 0$, ossia $\delta = 1 : C$. Ma il punto $F = f + (1 : C) \cdot X$ sta sulla evoluta di K, dunque il punto $F = f + \delta X$ sta pure sulla evoluta.

2. Per poter riconoscere se un segmento che soddisfa a una delle predette condizioni (5) o (6) è o non è un massimo o un minimo, bisogna, conformemente ai canoni del Calcolo, considerare la derivata seconda ed esaminarne il segno. Ora abbiamo

(11) $$\frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{du^2} = \int_g \left(f_1 - F_1 \frac{dv}{du}\right)^2 dt + \int_g \left(f_{11} - F_{11} \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - F_1 \cdot \frac{d^2 v}{du^2}\right)(f - F) dt.$$

(¹) G. VITALI, loc. cit., p. 214.

Nel *caso* α si ha:

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{du^2}=\int\limits_g\left(f_1-F_1\frac{dv}{du}\right)^2 dt+\int\limits_g\left(f_{11}-F_{11}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right)(f-F)dt.$$

Nel *caso* β si ha:

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{du^2}=\int\limits_g\left(f_1-F_1\frac{dv}{du}\right)^2 dt.$$

Di qui risulta che in questo caso la derivata seconda è positiva e quindi si ha un minimo per il segmento. Questo fatto era da prevedersi perchè in questo caso $\delta=0$ e quindi si ha un minimo.

Nel *caso* γ si ha:

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{du^2}=\int\limits_g f_1^{\,2}dt+\int\limits_g\left(f_{11}-F_1\frac{d^2v}{du^2}\right)(f-F)dt.$$

3. Esempio. Sieno φ e ψ due parametri normali ed ortogonali: la

$$f=u^2\cdot\varphi+\sqrt{2}u\cdot\psi$$

è la determinante di una parabola del piano che passa per l'origine e che contiene i parametri φ e ψ, e che ha per asse φ e per tangente nel vertice ψ. La

$$F=a\cdot\varphi+\sqrt{2}v\cdot\psi$$

è la determinante di una retta parallela a ψ, a una distanza costante a.

Nell'esempio nostro, le (2), (5), (6), a calcoli fatti e a trasformazioni eseguite, diventano:

(2°) $$v=u^3-ua+u,$$

(5°) $$u-v=0,$$

(6°) $$3u^2+1-a=0.$$

Facendo sistema fra le (2°), (5°) e le (2°), (6°), si hanno le tre soluzioni

$$u=0,\quad u=\pm\sqrt{a},\quad u=\pm\sqrt{\frac{a-1}{3}}.$$

Corrispondentemente ai tre valori di u trovati, dove supporremo $a>1$ per avere valori reali, si hanno per v i valori

$$v=0,\quad v=\pm\sqrt{a},\quad v=\mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(a-1)^3}{3}}.$$

A queste tre soluzioni corrispondono rispettivamente i punti

$$(\alpha) \qquad f = 0, \quad F = a \cdot \varphi,$$

$$(\beta) \qquad f = F = a \cdot \varphi \pm \sqrt{2a} \cdot \psi,$$

$$(\gamma) \qquad f = \frac{a-1}{3} \cdot \varphi \pm \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (a-1)} \cdot \psi, \quad F = a \cdot \varphi \mp \sqrt{\frac{8}{27}(a-1)^3} \cdot \psi.$$

Per decidere se si tratta di massimi o di minimi, basta considerare il segno della (11) nei tre casi considerati.

Effettuati i calcoli si ha:

Nel *caso* α: $\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{du^2} = a(1-a)$.

Essendo per ipotesi $a > 1$ risulta $\frac{d^2\delta}{du^2} < 0$ e quindi si ha un massimo.

Nel *caso* β è già noto che si ha un minimo.

Nel *caso* γ: $\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{du^2} = -\frac{2}{3}(a-1)(2a+1)$.

Essendo per ipotesi $a > 1$, risulta $\frac{d^2\delta}{du^2} < 0$ e quindi si ha un massimo.

Si vede che in ogni caso si ha un massimo o un minimo.

4. Sieno $f(t, u_1, u_2)$, $F(t, u_1, u_2)$ le determinanti di due superficie K e K' giacenti in S_3; δ la distanza AA' dei punti A e A' rispettivamente di K e di K'. Si ha

$$(1') \qquad \delta^2 = \int_g (f-F)^2 dt.$$

Le condizioni di ortogonalità in A alla K, sono date da

$$(2') \qquad \int_g (f-F) \cdot f_r dt = 0, \qquad (r = 1, 2)$$

dalle quali si ricavano le v_i in funzione delle u_i. Le condizioni di massimo o di minimo di (1′), tenendo presenti le (2′), sono date da

$$(3') \qquad \int_g (f-F)\left(F_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u_r} + F_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial u_r}\right) dt = 0, \qquad (r = 1, 2)$$

ossia

$$(4') \qquad \frac{\partial v_1}{\partial u_r} \cdot \int_g (f-F) F_1 dt + \frac{\partial v_2}{\partial u_r} \cdot \int_g (f-F) F_2 dt = 0, \qquad (r = 1, 2)$$

che si scindono nelle condizioni

$$\int_g (f - F) \cdot F_s dt = 0, \qquad (s = 1, 2) \tag{5'}$$

che esprimono essere la corda AA' perpendicolare alla K' anche in A' se f è generalmente diversa da F, oppure che $f = F$ e nella condizione

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(u_1, u_2)} = 0, \tag{6'}$$

assieme a una delle (4').

Trattandosi di una V_2 in S_3, il Π_2 [1] è a una sola dimensione, esiste dunque un solo parametro normale X, sarà dunque

$$F - f = \delta X; \quad f_{r,s} = x_{r,s} X \quad \text{con} \quad x_{r,s} = \int_g X f_{r,s} dt. \tag{9'}$$

Derivando le (2') rispetto a u_s avremo

$$\int_g \left(f_s - F_1 \frac{\partial v_1}{\partial u_s} - F_2 \frac{\partial v_2}{\partial u_s} \right) \cdot f_r dt + \int_g (f - F) f_{r,s} dt = 0 \quad (r = 1, 2).$$

Posto

$$a_{r,s} = \int_g f_r \cdot f_s dt, \quad \alpha_{r,s} = \int_g F_r \cdot f_s dt,$$

risulta tenendo conto delle (9')

$$a_{r,s} - \delta x_{r,s} = \alpha_{1,r} \frac{\partial v_1}{\partial u_s} + \alpha_{2,r} \frac{\partial v_2}{\partial u_s} \qquad (r = 1, 2).$$

Allora

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \delta x_{1,1} & a_{1,2} - \delta x_{1,2} \\ a_{2,1} - \delta x_{2,1} & a_{2,2} - \delta x_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

e quindi per la (6') si ha

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \delta x_{1,1} & a_{1,2} - \delta x_{1,2} \\ a_{2,1} - \delta x_{2,1} & a_{2,2} - \delta x_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ma questa è l'equazione dei raggi di curvatura [2], dunque nelle condizioni di massimo o di minimo supposte, A' appartiene alla evoluta della superficie.

(1) G. Vitali, loc. cit., p. 211.

(2) L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale.* III ed., vol. I, parte I, p. 189. (Naturalmente le E, F, G, coincidono con le nostre $a_{r,s}$; le D, D', D'' con le $x_{r,s}$; r con $-\delta$).