BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

TELESIO VOLPE RINONAPOLI

Sulle radici della derivata di alcune funzioni trascendenti intere di genere finito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 87–89.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sulle radici della derivata di alcune funzioni trascendenti intere di genere finito.

Nota di TELESIO VOLPE RINONAPOLI (a Livorno).

Sunto. - *In questa Nota viene estesa ad alcune classi di funzioni intere di rango* p *e genere* p *o* p + 1 *con radici tutte reali la proprietà che anche la loro derivata ha tutte le radici reali.*

Alcuni tipi di funzioni trascendenti intere di genere finito hanno la proprietà che se tutte le loro radici sono reali (e per alcune inoltre non nulle) anche la loro derivata ha tutte le radici reali (1).

In questa nota io mi propongo di estendere la proprietà stessa ad alcune altre classi di funzioni di genere finito, che non mi risulta essere state ancora considerate (2).

TEOREMA 1. — Se la funzione trascendente intera $f(x)$ di rango p ha tutte le radici c_h reali e non nulle e il fattore esponenziale

(1) Vedi LAGUERRE, *Sur quelques équations transcendantes.* « Comp. Ren. », Acc. Paris 94, 1882; CESARO, *Remarques sur les fonctions holomorphes,* « Gior. Mat. » 22, 1884 e « Comp. Ren. », Acc. Paris 99, 1884; *Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque*; DÉSAINT, *Sur les fonctions de genre fini,* « Comp. Ren. », Acc. Paris 120, 1895.

(2) VIVANTI G., *Sullo stato attuale della teoria delle funzioni intere* « Atti Soc. Progresso Scienze », Firenze 1909. « Encyclopedie der Math. Wiss. », Band II, 3 A. Bieberbach, 1909-921. « Memorial des Sciences Mathématiques », Fasc. II, 1925, par G. Valiron.

esterno $e^{\alpha x^{p+1}+\beta x^p+\gamma}$ con $\alpha \leq 0$, e $\beta \geq 0$, anche la sua derivata ha tutte le radici reali.

Si ha, com'è noto:

$$f(x) = e^{\alpha x^{p+1}+\beta x^p+\gamma} \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{kc_h^k}}.$$

da cui:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = (p+1)\alpha + \frac{p\beta}{x} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^p(x-c_h)} = 0.$$

Se $x = u + iv$ è una radice di $f'(x)$ si deve avere:

$$(p+1)\alpha + \frac{p\beta}{u+iv} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^p(u-c_h+iv)} = 0$$

da cui, separando il reale dall'immaginario:

$$(1) \qquad (p+1)\alpha + \frac{p\beta u}{u^2+v^2} + u\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^p[(u-c_h)^2+v^2]} - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{p-1}[(u-c_h)^2+v^2]} = 0$$

e:

$$(2) \qquad v\left(\frac{p\beta}{u^2+v^2} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^p[(u-c_h)^2+v^2]}\right) = 0.$$

Ora se p è pari il fattore in parentesi della (2) non può esser nullo onde dev'essere $v = 0$ cioè le radici della $f'(x)$ sono tutte reali.

Se invece p è dispari si ha da (2) che se fosse.

$$(2') \qquad \frac{p\beta}{u^2+v^2} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^p[(u-c_h)^2+v^2]} = 0$$

risulterebbe dalla (1)

$$(3) \qquad (p+1)\alpha - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{p-1}[(u-c_h)^2+v^2]} = 0,$$

condizione assurda perchè α si è supposto non positivo; deve essere dunque (per la (2)) $v = 0$, e cioè la $f'(x)$ ha ancora tutte le radici reali.

Dalla dimostrazione del Teorema precedente, conservando per la funzione $f(x)$ la ipotesi delle c_h reali, risultano anche gli altri:

Teorema 2. — Se p è pari e $\beta \geq 0$, la $f'(x)$ ha tutte le radici reali. Infatti dalla (2) risulta $v = 0$.

Teorema 3. — Se p è dispari e le c_h hanno inoltre tutte lo stesso segno (di β se $\beta \neq 0$), la $f'(x)$ ha tutte le radici reali. Risulta infatti dalla (2) $v = 0$.

Teorema 4. — Se p è pari e le c_h hanno inoltre tutte lo stesso segno (contrario a quello di α se $\alpha \neq 0$), la $f'(x)$ ha tutte le radici reali. Infatti la (2') porterebbe alla (3) che è assurda; dev'essere dunque $v = 0$.

Teorema 5. — Se una funzione $f(x)$ trascendente intera di genere p dispari ha le radici c_h tutte reali e non nulle e il fattore esponenziale esterno $e^{\alpha x^p + \beta x^{p-1} + \gamma}$ con α reale e $\beta \geq 0$, pure la sua derivata ha tutte le radici reali.

Si ha:

$$f(x) = e^{\alpha x^p + \beta x^{p-1} + \gamma} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}}$$

donde:

$$\frac{f'(x)}{x^{p-1} f(x)} = p\alpha + \frac{(p-1)\beta}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h^p (x - c_h)} = 0.$$

Se $x = u + iv$ è una radice di $f'(x)$, si deve avere:

$$p\alpha + \frac{(p-1)\beta}{u + iv} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{u + iv}{c_h^p (u - c_h + iv)} = 0,$$

donde annullando il coefficiente dell'immaginario:

$$v\left(\frac{(p-1)\beta}{u^2 + v^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}[(u - c_h)^2 + v^2]}\right) = 0, \tag{4}$$

la quale, essendo $\beta \geq 0$ e p dispari, dà $v = 0$, cioè tutte le radici di $f'(x)$ sono reali. Dalla dimostrazione precedente, ferma restando l'ipotesi che le c_h siano tutte reali, risulta il

Teorema 6. — Se p è pari e le c_h hanno tutte lo stesso segno (di β se $\beta \neq 0$) la $f'(x)$ ha tutte le radici reali.

Infatti dalla (4) si ha necessariamente $v = 0$.