Bollettino Unione Matematica Italiana

Pacifico Mazzoni

Sui polinomi di approssimazione minima

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 67–74.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_67_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

Sui polinomi di approssimazione minima.

Nota di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

Sunto. - *Dimostriamo alcune proprietà dei polinomi di* TCHEBYCHEV, *le quali estendono altre loro proprietà note. Ne faremo poi applicazione in un successivo lavoro, in cui mostreremo come si possa utilmente applicare in pratica tale metodo d'interpolazione.*

1. **Polinomio di minima approssimazione di Tchebychev.** — Ricordiamo le proprietà caratteristiche del polinomio di approssimazione minima, di grado n [1]. Data una funzione reale $f(x)$, continua in un intervallo $\alpha\beta$, e dato un polinomio $P(x)$ di grado n, a coefficienti reali, il massimo valore assoluto della differenza $f(x) - P(x)$ si chiama « l'approssimazione conseguita col polinomio $P(x)$ nel detto intervallo ». È noto che *esiste un polinomio* $\mathrm{P(x)}$, *unico e determinato fra tutti quelli di grado* $\leq \mathrm{n}$, *il quale realizza la migliore approssimazione possibile (nell'intervallo* $\alpha\beta$), *e che ha la seguente proprietà caratteristica:*

Esistono certi $\mathrm{n} + 2$ *punti* $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}+1}$ *tra* α *e* β, *nei quali lo scarto* $\mathrm{f(x)} - \mathrm{P(x)}$ *raggiunge i suoi valori estremi* $\pm \rho$, *con segno alternato* [2].

Indicheremo sempre con $P(x)$ il polinomio di approssimazione minima, e con ρ il valore di tale approssimazione.

(1) Una chiara e completa esposizione di questa teoria è svolta nel libro del DE LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.* (Paris, Gauthier-Villars, 1919, pagg. 74-92. Collezione BOREL).

Vedasi anche le importanti Opere: S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales, ecc.* (Collezione BOREL, Paris, Gauthier-Villars, 1926); L. TONELLI, *Serie trigonometriche.* (Bologna, Zanichelli, 1928).

(2) V. Opera citata (1) del DE LA VALLÉE POUSSIN, n.° 56. Il sistema di numeri $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ può anche non essere unico.

2. Approssimazione minima su un sistema di $n+2$ punti. — Dato un sistema E di $n+2$ punti $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ (in ordine crescente) del solito intervallo $\alpha\beta$, e data una funzione che in questi punti assuma i valori $f(y_0), f(y_1), \dots, f(y_{n+1})$, considerato il polinomio

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n,$$

il più grande degli scarti assoluti $|f(y_i) - Q(y_i)|$ si chiama « approssimazione conseguita col polinomio $Q(x)$ *sul detto sistema* E *di punti* ». Ricordiamo che *esiste un polinomio* Q(x), *unico e determinato, il quale realizza la migliore approssimazione* ρ_1 *sul sistema dato* E: *esso è tale che gli scarti* $f(y_i) - Q(y_i)$ *risultano uguali alternativamente a* $+\rho_1$ *e a* $-\rho_1$ (a meno che non risulti $\rho_1 = 0$, caso che negli studi seguenti escluderemo sempre) ([3]).

Chiamiamo σ_1 il valore del primo scarto $f(y_0) - Q(y_0)$, dimodochè sarà $\rho_1 = |\sigma_1|$. Allora i coefficienti $b_0, b_1, \dots, b_n$ di $Q(x)$ si otterranno risolvendo il sistema seguente di $n+2$ equazioni lineari nelle $n+2$ incognite $b_0, b_1, \dots, b_n, \sigma_1$:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(y_0) = \sigma_1 + b_0 + b_1 y_0 + b_2 y_0^2 + \dots + b_n y_0^n ; \\ f(y_1) = -\sigma_1 + b_0 + b_1 y_1 + \dots + b_n y_1^n ; \\ f(y_2) = \sigma_1 + b_0 + b_1 y_2 + \dots + b_n y_2^n ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(y_{n+1}) = (-1)^{n+1}\sigma_1 + b_0 + b_1 y_{n+1} + \dots + b_n y^n_{n+1} ; \end{array} \right.$$

sistema che ha sempre il determinante diverso da 0 ([4]).

Ricordiamo ancora i seguenti teoremi: *Qualsiansi i numeri* $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ *dell'intervallo* $\alpha\beta$, *risulta sempre* $\rho_1 \leq \rho$, *e quando sia* $\rho_1 = \rho$, *allora* Q(x) *realizza l'approssimazione minima su tutto l'intervallo* $\alpha\beta$, *cioè allora* Q(x) *coincide con* P(x) [n.i 63-64 dell'Opera citata ([1])].

Infine: *se lo scarto* $f(x) - Q(x)$ *non supera mai numericamente* ρ_1 *in tutto l'intervallo* $\alpha\beta$, *allora* $\rho_1 = \rho$ *e* Q(x) *coincide con* P(x) [n.° 56-3°, pag. 78 dell'Opera citata ([1])].

3. Espressione di ρ_1. — Data la funzione $f(x)$, consideriamo il polinomio $Q(x)$ (di grado $\leq n$) di minima approssimazione ρ_1 su

([3]) V. Opera citata ([1]), n.° 58, pag. 78.

([4]) V. loco cit. nota precedente. Detto determinante è della forma $A_0 + A_1 + \dots + A_{n+1}$, dove A_r è uguale al prodotto delle distanze a due a due degli $n+1$ punti $y_0, y_1, \dots, y_{r-1}, y_{r+1}, \dots, y_{n+1}$. È evidente che A_r è sempre $< (\beta-\alpha)^{n(n+1):2}$ ed è $> \delta^{n(n+1):2}$, se δ indica la più piccola delle distanze $y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_{n+1} - y_n$.

un sistema E di $n+2$ punti $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ dell'intervallo $\alpha\beta$, ed osserviamo la nota espressione di ρ_1 (5):

$$(1) \qquad \rho_1 = \frac{\left| \frac{f(y_0)}{\omega_0} - \frac{f(y_1)}{\omega_1} + \frac{f(y_2)}{\omega_2} - \dots \pm \frac{f(y_{n+1})}{\omega_{n+1}} \right|}{\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}}},$$

dove si è posto per brevità:

$$(2) \qquad \omega_k = |(y_0 - y_k)(y_1 - y_k) \dots (y_{k-1} - y_k)(y_{k+1} - y_k) \dots (y_{n+1} - y_k)|.$$

Il numeratore della (1) non è altro che il valore assoluto della funzione interpolare $f(y_0 y_1 \dots y_{n+1})$ (6); perciò la (1) si trasforma così:

$$(\mathrm{II}) \qquad \rho_1 = \frac{|f(y_0 y_1 \dots y_{n+1})|}{\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}}}.$$

Ma è noto che si ha: $f(y_0 y_1 \dots y_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$; perciò dalla (II) si deduce l'importante relazione:

$$(\mathrm{III}) \qquad \rho_1 = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}}},$$

ove ξ rappresenta un numero compreso fra y_0 e y_{n+1}.

A questo punto avvertiamo che in seguito faremo sempre l'ipotesi che *la derivata* $f^{(n+1)}(x)$, *anche se non è continua, resti però in valore assoluto inferiore a un numero fisso* M, *quando* x *varia tra* α *e* β; *o almeno, se la funzione data* f(x) *non è derivabile, che la funzione interpolare* $f(y_0 y_1 \dots y_{n+1})$ *resti sempre numericamente inferiore a un numero fisso* N, *scegliendo comunque i punti* $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ *tra* α *e* β.

Ora se indichiamo con δ la più piccola delle distanze $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1, \dots, y_{n+1} - y_n$, e poniamo che sia, ad esempio: $y_{i+1} - y_i = \delta$, sarà evidentemente, per la (2):

$$\omega_i < (y_{i+1} - y_i) \cdot (\beta - \alpha)^n = \delta \cdot (\beta - \alpha)^n,$$

come pure sarà:

$$\omega_{i+1} < (y_{i+1} - y_i) \cdot (\beta - \alpha)^n = \delta \cdot (\beta - \alpha)^n;$$

(5) V. Opera citata (1), n.° 59.

(6) Per le funzioni interpolari vedasi A. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica.* (Pellerano succ., Napoli, 1909), pag. 274, cap. VII. § 3 e pag. 508.

sicchè il denominatore della (III) sarà $> \frac{1}{\omega_i} + \frac{1}{\omega_{i+1}} > \frac{2}{\delta(\beta-\alpha)^n}$, e dalla (III) si avrà:

$$\rho_1 < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|\,\delta(\beta-\alpha)^n}{2}. \tag{3}$$

Avendo supposto che $f^{(n+1)}(x)$ resti sempre numericamente inferiore a un numero fisso M, avremo dalla (3):

$$\rho_1 < \frac{\delta\cdot(\beta-\alpha)^n\cdot M}{2(n+1)!}. \tag{IV}$$

Questa relazione ben nota, e che qui abbiamo ritrovata per una via più semplice di quella seguita al n.° 59 del lavoro citato [1], sarà di fondamentale importanza per le nostre ulteriori ricerche [7]. Essa equivale all'altra:

$$\delta > \frac{2\cdot(n+1)!}{(\beta-\alpha)^n\cdot M}\cdot\rho_1. \tag{V}$$

4. Una proprietà di $P(x)$. — Ci proponiamo di generalizzare i due noti teoremi ricordati alla fine del n.° 2.

Data una funzione continua $f(x)$ nell'intervallo $\alpha\beta$, indichiamo, come al solito, con $P(x)$ il polinomio di approssimazione minima di grado $\leq n$ (su tutto l'intervallo $\alpha\beta$), con ρ il valore di questa approssimazione, e con $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ il sistema di punti ove gli scarti

$$f(x_0)-P(x_0);\quad f(x_1)-P(x_1);\ldots;\quad f(x_{n+1})-P(x_{n+1}) \tag{4}$$

raggiungono i valori estremi $\pm\rho$, con alternanza di segno.

Dimostriamo che ha luogo il seguente teorema:

Data una funzione f(x) *che soddisfi alla condizione del n.° 3, e data una successione di polinomi di grado* $\leq$ n:

$$Q_1(x),\quad Q_2(x),\quad Q_3(x)\ldots.. \tag{5}$$

se il polinomio Q_i *fornisce l'approssimazione minima* ρ_i *su un certo sistema* E_i *di punti* $y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{n+1}^{(i)}$, *e se la successione* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ *di codeste corrispondenti approssimazioni minime ha per limite* ρ, *allora la successione* (5) *ha per limite precisamente* P(x).

In maniera meno rigorosa, ma più significativa, possiamo enunciarlo così:

Se su un certo sistema di n + 2 *punti il polinomio* Q(x) *for-*

[7] Essa è evidentemente valida anche se $f(x)$ non è derivabile, purchè sia soddisfatta la condizione suddetta sulla funzione interpolare $f(y_0 y_1 \ldots y_{n+1})$.

nisce l'approssimazione minima ρ', *ed è* ρ' *vicinissimo a* ρ, *allora* Q(x) *è vicinissimo a* P(x).

Anzitutto osserviamo che preso un numero fisso positivo $\tau < \rho$, potremo avere al più un numero finito di numeri della successione $\rho_1, \rho_2, \ldots$ minori di τ. Non si altera dunque la generalità, se si suppone che tutti i numeri $\rho_1, \rho_2, \ldots$ siano maggiori di τ.

Consideriamo un polinomio $Q_i(x)$ della successione (5), il quale fornisce su certi $n+2$ punti $y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{n+1}^{(i)}$ (in generale variabili al variare di i) degli scarti $f(x) - Q_i(x) = \pm \rho_i$, di segno alternato. Indichiamo, per brevità di scrittura, semplicemente con $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ i detti punti. È noto che la funzione $f(x) - P(x)$ ammette come polinomio di approssimazione minima su codesti $n+2$ punti precisamente la differenza $Q_i(x) - P(x)$, e che il valore di questa approssimazione è ancora ρ_i, dato dalla formola:

$$\rho_i = \frac{|A_0 r_0 + A_1 r_1 + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}|}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}, \tag{6}$$

dove si è posto per brevità:

$$r_s = (-1)^s \cdot [f(y_s) - P(y_s)] \text{ [8]}. \tag{7}$$

Dimostriamo che se i cresce indefinitamente, allora i numeri $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ tendono tutti a $+\rho$, ovvero tutti a $-\rho$.

Infatti supponiamo, per fissar le idee, che la quantità $A_0 r_0 + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}$ sia positiva. Si ha allora dalla (6):

$$\begin{aligned} \rho_i = {} & \frac{A_k r_k}{A_0 + \ldots + A_{n+1}} + \\ & + \frac{A_0 r_0 + \ldots + A_{k-1} r_{k-1} + A_{k+1} r_{k+1} + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ma tutti gli scarti (7) devono essere sempre numericamente $\leq \rho$ (perchè è sempre $|f - P| < \rho$), perciò dalla (8) si ha (qualunque sia il segno delle $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$):

$$\rho_i \leq \frac{A_k r_k}{A_0 + \ldots + A_{n+1}} + \rho \cdot \frac{A_0 + \ldots + A_{k-1} + A_{k+1} + \ldots + A_{n+1}}{A_0 + \ldots + A_{n+1}},$$

ossia:

$$\rho_i \leq \frac{A_k r_k}{A_0 + \ldots + A_{n+1}} + \rho - \frac{\rho A_k}{A_0 + \ldots + A_{n+1}},$$

[8] V. Opera citata [1], n.i 58 e 62. Ricordiamo che le quantità $A_0, A_1, \ldots$ sono tutte positive: il loro significato è indicato nella nota [4].

da cui:

$$(9) \qquad \rho - r_k \leq \frac{(\rho - \rho_i)(A_0 + A_1 + \dots + A_{n+1})}{A_k}.$$

Ora se δ indica la più piccola delle distanze $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1, \dots,$ $y_{n+1} - y_n$, si ha, per la (V):

$$\delta > \frac{2(n+1)!}{(\beta-\alpha)^n \cdot M} \cdot \rho_i ;$$

e siccome ρ_i è maggiore della quantità fissa (positiva) τ, si ha:

$$\delta > \frac{2(n+1)!}{(\beta-\alpha)^n \cdot M} \tau.$$

Ma d'altronde è $A_k > \delta^{n(n+1):2}$ (v. nota (4)), e perciò A_k è maggiore di una quantità fissa c. Segue allora dalla (9), *a fortiori*:

$$(9') \qquad \rho - r_k < \frac{\rho - \rho_i}{c} \cdot (n+2)(\beta-\alpha)^{n(n+1):2},$$

perchè tutte le quantità A_s sono $< (\beta - \alpha)^{n(n+1):2}$.

Ora facciamo tendere i all'infinito: siccome $\rho - \rho_i$ tende per ipotesi a 0, mentre c è fisso, e siccome r_k è $< \rho$, segue dalla (9') che r_k *tende necessariamente a* ρ (e ciò qualunque sia $k = 0, 1, \dots, n+1$).

In modo analogo si procede, se la quantità $A_0 r_0 + \dots + A_{n+1} r_{n+1}$ è negativa. La proprietà è dunque dimostrata.

Risulta come corollario che i numeri $r_0, r_1, \dots, r_{n+1}$, per i abbastanza grande, hanno tutti uno stesso segno, vale a dire che gli scarti

$$(7') \qquad f(y_0) - P(y_0); \quad f(y_1) - P(y_1); \dots ; \quad f(y_{n+1}) - P(y_{n+1})$$

hanno segno alternato.

Ora dimostriamo che *codesti scarti* (7') *hanno allora ordinatamente gli stessi segni degli scarti seguenti:*

$$(10) \qquad f(y_0) - Q_i(y_0); \quad f(y_1) - Q_i(y_1); \dots ; \quad f(y_{n+1}) - Q_i(y_{n+1}).$$

Infatti, se fosse, al contrario, contemporaneamente:

$$\begin{cases} f(y_0) - Q_i(y_0) > 0, \\ f(y_0) - P(y_0) < 0, \end{cases}$$

si avrebbe, sottraendo:

$$(11) \qquad P(y_0) - Q_i(y_0) > 0.$$

Ma allora sarebbe pure contemporaneamente:

$$\begin{cases} f(y_1) - Q_i(y_1) < 0, \\ f(y_1) - P(y_1) > 0, \end{cases}$$

e quindi pure:

$$P(y_1) - Q_i(y_1) < 0. \tag{11'}$$

Sicchè la differenza $P(x) - Q_i(x)$, per le (11) e (11'), sarebbe positiva nel punto y_0, e negativa nel punto y_1, epperò dovrebbe annullarsi in un punto intermedio fra y_0 e y_1. Analogamente essa dovrebbe annullarsi in un altro punto intermedio fra y_1 e y_2, ecc., ed in un punto fra y_n e y_{n+1}. Insomma $P(x) - Q_i(x)$ si annullerebbe in $n+1$ punti distinti, e sarebbe identicamente nulla: il che sarebbe contro la (11). Dunque gli scarti (7') hanno ordinatamente gli stessi segni degli scarti (10) (se i è abbastanza grande). C. d. d.

Ora al crescere indefinito di i gli scarti (10) (che sono tutti $= \pm \rho_i$) tendono pure a $\pm \rho$, come gli scarti (7'); e siccome essi hanno ordinatamente gli stessi segni degli scarti (7'), segue che i valori $Q_i(y_0)$, $Q_i(y_1)$,..., $Q_i(y_{n+1})$ tendono allora ordinatamente ai valori $P(y_0)$, $P(y_1)$,..., $P(y_{n+1})$.

Siccome le differenze $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, ecc. sono tutte numericamente maggiori di una quantità fissa, segue evidentemente che al crescere indefinito di i il polinomio $Q_i(x)$ tende a $P(x)$ (essendo entrambi di grado $\leq n$) [9]. Il teorema è così completamente dimostrato.

5. Altra proprietà dei polinomi di approssimazione minima. — *Data una successione di polinomi, ciascuno di grado* $\leq$ n:

$$Q_1(x), \quad Q_2(x), \quad Q_3(x), \ldots, \tag{5}$$

se Q_i *fornisce l'approssimazione minima* ρ_i *su un certo sistema di punti* $y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{n+1}^{(i)}$, *e se* ρ_i *differisce dal massimo valore numerico dello scarto* $f(x) - Q_i(x)$ (*fra* α *e* β) *di una quantità tendente a* 0 *al crescere indefinito di* i, *allora la successione* (5) *ha per limite il solito polinomio* P(x) *di approssimazione minima su tutto l'intervallo* $\alpha\beta$ (*e necessariamente* ρ_i *tende a* ρ).

In altre parole: *se* ρ_i *è vicinissimo al massimo valore di* $|f(x) - Q_i(x)|$ *fra* α *e* β, *allora* $Q_i(x)$ *è vicinissimo a* P(x).

[9] Basta ricordare che i coefficienti di Q_i e di P si ottengono dalla formola d'interpolazione di LAGRANGE e che si hanno delle espressioni i cui denominatori restano superiori a una quantità fissa. Vedasi anche Opera citata [1], n.° 53, pag. 74.

Chiamiamo M_i il massimo valore di $|f(x) - Q_i(x)|$ tra α e β. Scelto un numero positivo arbitrario ε, esisterà per ipotesi un intero h tale che per qualunque intero $i \geq h$ sia

$$(12) \qquad M_i - \rho_i < \varepsilon.$$

Ma essendo $\rho \leq M_i$ (perchè altrimenti Q_i darebbe un'approssimazione migliore di P su tutto $\alpha\beta$), segue *a fortiori* dalla (12): $\rho - \rho_i < \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε (ed essendo $\rho_i < \rho$), si deduce che la successione $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ ha per limite proprio ρ. Dal teorema del numero precedente segue che la successione (5) ha per limite precisamente $P(x)$.

Abbiamo così generalizzati i due teoremi ricordati alla fine del n.° 2. Di queste proprietà faremo applicazione in un successivo lavoro. Aggiungiamo che l'ultimo teorema dimostrato si può considerare come un'estensione del teorema del n.° 65 dell'Opera citata [1].