
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * Hurwitz-Courant: Functionentheorie
- * E. Lampe: Mathematik und Sport
- * A. Comessatti: Lezioni di geometria analitica e proiettiva
- * G. Loria : Curve piane speciali algebriche e trascendenti. - Teoria e Storia
- * L. Bieberbach: Analytische Geometrie
- * C. Gini e L. Galvani : Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi
- * C. A. Bjernes: Niels Henrik Abel: eine Schilderung seines Lebens und seiner Arbeit.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 9 (1930), n.2, p. 105–113.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_105_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_105_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_105_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

RECENSIONI

HURWITZ-COURANT: *Functionentheorie*. 3^{te}-Auflage. Berlin, J. Springer, 1929. pagg. XII-534.

La prima edizione di quest'opera comparve nel 1922; la seconda nel 1925. L'essersi ora, a distanza di quattro anni pubblicata la terza edizione dimostra quanto incontro abbiano fatte le lezioni del compianto matematico di Zurigo, curate nei più piccoli particolari dal distinto professore di Gottinga, R. COURANT. La prima parte dell'opera tratta della teoria delle funzioni analitiche secondo le idee di WEIERSTRASS; la seconda contiene una teoria delle funzioni ellittiche che si può dire racchiuda, in sole cento pagine, quanto è necessario ad uno studioso di conoscere su quella importante classe di funzioni. La terza parte, dal titolo « teoria geometrica delle funzioni », riprende la teoria delle funzioni analitiche, ma questa volta al punto di vista di CAUCHY-RIEMANN, trattando con singolare chiarezza della rappresentazione conforme, di speciali rappresentazioni, del principio di DIRICHLET ed, in poche pagine dense di contenuto, delle funzioni algebriche su una data superficie di RIEMANN, dell'uniformizzazione e dell'esistenza delle funzioni automorfe. A questa terza parte è assai più ampio, nella presente edizione, il contributo portato dal COURANT, che ha dato all'importante contenuto un'impronta più moderna. Alla nuova edizione, cui hanno contribuito, con loro preziosi consigli, scienziati quali il CARATHÉODORY e l'HARALD BOHR, non potrà mancare la più favorevole accoglienza. (u)

E. LAMPE: *Mathematik und Sport*. Teubner 1929. (« Mathem. Physikalische Bibliothek ». Bd. 74).

In questo volumetto l'A. indica alcuni problemi di matematica applicata nientemeno che allo Sport. Sono in complesso 116 esercizi scelti con garbo e ordinati secondo le varie categorie di sport: corsa, lancio di pesi, salto, giuoco alla palla, tennis, ciclismo e diversi altri.

Il volumetto si legge volentieri e mostra effettivamente, come desidera l'A., quante svariate applicazioni abbia la matematica anche nelle questioni sportive. g. s.

A. COMESSATTI: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Parte prima. Padova, Cedam, 1930-VIII, pagg. XV-462: legato in tela L. 60.

Con questa prima parte il chiaro Autore inizia la pubblicazione di un corso di Istituzioni geometriche che, come viene annunciato nella prefazione, ha per fine di « accompagnare il giovane durante tutta la carriera di studi universitari e più oltre ».

Perciò, insieme a quello che si può svolgere nel biennio propedeutico, il corso conterrà quanto può servire a colmare le lacune che spesso si lamentano nel passaggio dal primo al secondo biennio di matematica, nonché almeno la parte informativa sugli « argomenti che più o meno direttamente interferiscono con le matematiche elementari ».

Il corso riuscirà quindi utilissimo anche al laureato desideroso di acquistare la cultura geometrica più appropriata ai fini dell'insegnamento medio.

Questo scopo e queste direttive del corso appaiono già evidenti da questo primo volume ove, in ogni paragrafo, accanto alla parte scolastica (intonata sempre al piano generale dell'opera, senza per nulla venir meno alle più belle doti di chiarezza e semplicità) si trovano — in carattere più minuto e in paragrafi asteriscati — temi di maggior dettaglio che svolgono argomenti complementari, ovvero anche interi capitoli introduttori di discipline speciali immediatamente a margine delle nozioni istituzionali.

Segnaliamo qui qualcuna delle maggiori novità e dei più notevoli pregi del libro, tralasciando di dire di tanti altri, per amore di brevità.

Per la prima volta un corso istituzionale italiano di geometria impiega sistematicamente gli algoritmi vettoriali per *tutti* gli sviluppi metrici della geometria cartesiana, dalla trasformazione di coordinate, nel piano e nello spazio, agli elementi di geometria differenziale delle superficie (parte complementare dell'ultimo paragrafo).

L'iniziativa (1) ci sembra utile e proficua poichè il concetto di

(1) Il SEVERI, nel suo corso scolastico litografato del 1920 (a Padova) si valse promiscuamente dell'algoritmo vettoriale e di quello delle proiezioni. L'A., seguendo la via tracciatagli dal Maestro, l'ha proseguita ed ampliata sostituendo in tutto l'algoritmo delle proiezioni del D'OVVIDIO (che è incluso

vettore, come astrazione logica, è assai vicino all'intuizione geometrica e si presenta come il più atto a sintetizzare quello di orientamento: onde il calcolo vettoriale presenta notevoli vantaggi didattici per la esposizione delle proprietà metriche degli enti geometrici: però a patto che chi ne faccia uso possieda eminenti qualità di eleganza algoritmica, com'è indubbiamente il caso del nostro A. Il quale ha apportato all'argomento con pochi contributi personali, sia con sistemazioni e semplificazioni varie (ad es., per le equazioni normali della retta e del piano) sia con la parte introduttiva alla triedrometria, che rispetto alla trattazione nota, si presenta più rapida, più completa e più generale, poichè non abbisogna di convenzioni restrittive sull'orientazione degli spigoli e delle facce (il che porta ad un cambiamento di segno nella formola fondamentale della trigonometria sferica elementare ed in quella del coseno per la trigonometria piana) mentre il seno del triedro orientato (abc) viene presentato sotto la forma assai vantaggiosa di prodotto misto: $a \wedge \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Così pure, premesse alcune nozioni ed algoritmi vettoriali sulle forme quadratiche (in gran parte originali) si deducono in modo semplice ed elegante, le relazioni metriche nel riferimento cartesiano generale: dall'area del triangolo e dal volume del tetraedro orientati alle notevoli formole di EULERO per la trasformazione fra sistemi ortogonali, insieme alla nozione di poligono e di poliedro orientato (nozione in più punti coincidente con la magistrale trattazione dello SCORZA).

Anche la geometria metrico-differenziale delle curve e superficie è esposta con metodo vettoriale; giovandosi della trattazione del BURALI-FORTI e MARCOLONGO per le curve, e di quella del BLASCHKE per le superficie.

A questo proposito è da notare che l'A. si allontana dalla tradizione costantemente seguita in Italia dai migliori trattati di Geometria analitica, poichè, servendosi del calcolo infinitesimale, fa precedere tutta la parte generale e scolastica concernente le curve (piane e storte) e le superficie, e si ferma (in questo primo volume) sulle coniche e sulle quadriche a solo titolo di esempio e considerando solo equazioni canoniche. Si esemplificano invece molti altri tipi di curve piane algebriche e trascendenti: e dopo svolte le generalità (molto accurate) sulle superficie rigate, cilin-

nella proprietà distributiva del prodotto scalare). Altro precedente notevole è quello del BERZOLARI che ha inserito un'Appendice sugli *Elementi di analisi vettoriale* in fine al 1° volume della 3ª edizione del suo trattato di *Geometria analitica* (manuale Hoepli).

driche, coniche e rotonde, si ferma alquanto sulle quadriche e e sugli elicoidi.

Molto elegante è la esposizione dei fondamenti della teoria delle curve e delle superficie algebriche, ciò che interessa particolarmente l'Italia, che ha il glorioso vanto di essere il paese ormai classico della geometria algebrica.

Due sezioni del cap. IV sono dedicate alle proprietà dei circoli e dei fasci di circoli, mentre nei complementi si trovano quelle delle reti di circoli e quelle delle sfere e sistemi di sfere, con particolare riguardo alla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio, alla proiezione stereografica ed alla rappresentazione parametrica immaginaria della sfera (argomenti che preludono ad una più ampia interpretazione delle sostituzioni lineari nel campo complesso, in armonia con l'indirizzo attuale degli studi dell'A.).

Le nozioni di ordine e di orientamento, anche nei riguardi degli elementi impropri, sono molto curate nel testo e nei complementi. Esse sono desunte dall'intuizione spaziale, ma la loro posizione viene esattamente individuata nella serie dei postulati delle geometrie metrica e proiettiva. D'altra parte, nel cap. I. si trova anche una traccia per il collegamento logico delle nozioni stesse ai postulati fondamentali della geometria, con che l'orientamento delle forme di prima e di seconda specie riesce definito senza bisogno di uscire da ciascuna forma, quindi senza alcun ricorso alla intuizione spaziale. Pur trattandosi soltanto di una traccia, va mentovata come notevole, perchè pensata in modo originale.

A questa traccia si uniforma (ed è parimenti originale e si discosta, in parte, dalla trattazione classica di ENRIQUES-SEVERI), il modo come vengono introdotti i versi proiettivi nelle forme di 1^a specie e cioè mediante la divisione in due classi delle terne ordinate. Notevole è la dimostrazione dell'esistenza e del carattere proiettivo dagli ordinamenti naturali, sulla base del postulato dell'ordine nella geometria elementare, nonchè la introduzione della funzione τ il cui segno caratterizza il verso di una terna di elementi in una forma di prima specie. Ciò prelude alle applicazioni che l'A. si propone nella seconda parte, applicazioni che vengono qui preparate in una serie di esercizi (n.° 243).

Il postulato della continuità è messo, sin dall'inizio, a base della nozione di spazio proiettivo, conseguendo subito maggior semplicità e sveltezza di trattazione. La legge di dualità è posta chiaramente e rigorosamente in efficienza.

Gli elementi complessi vengono introdotti (forse per la prima

volta) nella forma corretta e completa che loro compete. Così dicasi della distinzione fra enti algebrici reali ed immaginari.

E qui, se lo spazio lo concedesse, bisognerebbe soffermarsi sul modo di pervenire alle equazioni della retta e del piano, sui concetti di sistemi generali di riferimento, sul sobrio ma esauriente cenno elementare sulle coordinate di retta nello spazio, ecc. Però non possiamo fare a meno di richiamare l'attenzione del lettore sulle accurate notizie storiche che non si limitano alla semplice citazione degli Autori classici, ma accennano anche ai lavori fondamentali coi quali furono introdotti i concetti e le proprietà pei quali sono ricordati.

Riassumendo, questa prima parte del corso istituzionale del COMESSATTI, per l'ottima trattazione, che si distingue per chiarezza ed eleganza di forma, per la gran messe degli argomenti complementari e speciali, per le novità scientifiche e didattiche, si impone all'attenzione dello studioso di geometria e dà sicuro affidamento che le altre due parti completeranno degnamente l'opera così bene iniziata.

Napoli, 5 marzo 1930.

SALVATORE CHERUBINO

G. LORLA: *Curve piane speciali algebriche e trascendenti. - Teoria e Storia*. Vol. I: *Curve algebriche*. (Milano, U. Hoepli, 1930; pagg. XVI-574).

Questa è la prima edizione italiana dell'opera del prof. LORLA già ben nota dalle due edizioni tedesche; essa viene così a colmare una lacuna nella letteratura matematica in lingua nostra. L'A. si è occupato dell'argomento fino dal 1897, in occasione di un concorso bandito dall'Accademia delle Scienze di Madrid: Egli è andato mano mano ampliandolo, ed il presente volume include notizie storiche e teoriche su pressochè tutte le curve algebriche che hanno ricevuto un nome speciale, o che, anche se anonime, hanno meritato un posto stabile nella scienza. Il volume è diviso in cinque libri, che trattano successivamente: Della retta, del cerchio e delle coniche; delle curve del terz'ordine, bene inteso dal punto di vista delle curve speciali; delle quartiche; delle curve algebriche particolari di ordine determinato ma superiore a quattro; delle curve algebriche particolari di ordine qualunque. Il secondo volume tratterà delle curve trascendenti e delle leggi di derivazione di curve da altre curve. L'opera, ricca di materiale interessante, di particolareggiate indicazioni storiche e bibliografiche, ed edita in bella forma, con non meno di 122 figure accu-

ratamente disegnate, non ha certo bisogno di ulteriore raccomandazione. (1)

L. BIEBERBACH: *Analytische Geometrie*. (B. 29 dei « Teubners Mathematische Leitfäden ». Leipzig. 1930, pagg. IV+120).

Questa « guida » alla Geometria Analitica non è, come la piccola mole potrebbe far pensare, un manualetto elementare, e non si rivolge ai principianti. Il piccolo ma sostanzioso volumetto vuole invece (come l'A. avverte nella vivace Prefazione) condurre un lettore già al corrente di quanto si apprende in un corso scolastico di geometria analitica, senza « annoiarlo con ripetizioni », a un riesame critico, fatto da un punto di vista moderno e con larghezza di vedute, delle nozioni e dei principi fondamentali e soprattutto dei *metodi* di esposizione e di ricerca di detta disciplina. Anzi, modificando profondamente l'ordinamento tradizionale, l'A. pone in prima linea l'esposizione dei metodi, e precisamente, del *calcolo vettoriale*, che è lo strumento fondamentale su cui l'A. basa la sua trattazione, e poi del *calcolo delle matrici* (quadrate). Di pari passo con l'esposizione di questi due algoritmi procede quello delle nozioni e dei principi fondamentali delle teorie degli enti *lineari* e *quadratici* del piano e dello spazio ordinario. Per resto, l'A. si limita ad esporre come « Esempi », cioè, come applicazioni più che altro dirette a saggiare la capacità e la portata degli strumenti approntati, svariate proposizioni e problemi relativi alle teorie prima abbozzate, insieme a sviluppi complementari che in modo più o meno diretto vi si collegano. In complesso questa breve opera, così diversa dalle attuali trattazioni della geometria analitica degli enti lineari e quadratici, riuscirà di utile ed attraente lettura a chiunque voglia approfondire la conoscenza di questo campo di studi (1).

Darò un breve sommario del volume:

§ 1. *Introduzione*. Richiami elementari su coordinate e vettori, raffronto. — § 2. *Vettori e punti*. La nozione di vettore, assiomi fondamentali della geometria (affine) vettoriale. Gli assiomi della dimensionalità del piano e dello spazio ordinario. Coordinate. Cenno sulle molteplicità vettoriali n -dimensionali. Punti, rette, piani. —

(1) Forse l'ultima parte (Cap. XI e seg.), ove si sviluppa e si applica il calcolo delle matrici, potrà ancor più dei precedenti Capitoli interessare qui in Italia, ove già abbiamo, e da molto tempo, delle buone esposizioni del calcolo vettoriale e delle sue applicazioni sia alla geometria degli enti lineari che a molti altri campi di ricerca.

§ 3. *Esempi*. Retta per due punti, piano per tre punti, punto comune a due rette, ecc. Teorema di PASCH. Centro di gravità. Teoremi di MENELAO e di CEVA, ecc. — § 4. *Lunghezza, angolo, ortogonalità* in relazione con la nozione di prodotto interno di due vettori. Nozioni sulle trasformazioni lineari. — § 5. *Esempi*. Il processo dell'ortogonalizzazione. Equazioni della retta nel piano, del piano nello spazio, ecc. — § 6. *Superficie e volumi*. (L'A. prende occasione per esporre una interessante teoria sintetica dei determinanti). — § 7. *Esempi*. Trasformazioni ortogonali. Orientazione. Triangolo e tetraedro. Sistemi di equazioni lineari. Allineamento, ecc. — § 8. *Il prodotto vettoriale*. — § 9. *Esempi*. Distanza di due rette, distanza di un punto da una retta o da un piano, ecc. — § 10. *Movimenti e congruenze inverse nel piano*. — § 11. *Il calcolo delle matrici*. Operazioni elementari. Matrice inversa, trasposta di una data. Matrice unitaria. — § 12. *Esempi*. Matrici ortogonali. Trasformazioni lineari omogenee. Congruenze inverse senza punti fissi nel piano. Trasformazioni ortogonali nello spazio. Angoli di ECLERO. — § 13. *Invarianti per movimento*. Il prodotto interno. Area di un poligono, volume di un poliedro, ecc. — § 14. *Curve e superficie del secondo ordine nella trattazione elementare*. — § 15. *L'equazione generale del secondo grado*. Discussione fatta col calcolo delle matrici. — § 16. *Classificazione metrica delle coniche*. — § 17. *Classificazione metrica delle quadriche*. — § 18. *Classificazione affine delle coniche*. — § 19. *Caratterizzazione geometrica delle trasformazioni affini*.

ENEAS BORTOLOTTI

C. GINI e L. GALVANI: *Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi*. « Metron », vol. VIII, un. 1-2.

L'immediata applicabilità dei procedimenti di calcolo ai caratteri quantitativi ed alle serie statistiche che ne dipendono, consentì agli statistici di dare alle teorie inerenti a tali serie un più rapido sviluppo di quanto, fino a pochi anni addietro, non fosse stato possibile per le serie che dipendono da un carattere qualitativo. La teoria di queste ultime rimase per lungo tempo in uno stato rudimentale, e progressi decisivi vi si poterono compiere solo dopo che, ad opera del GINI (1): 1° si distinsero razionalmente i carat-

(1) C. GINI, *Variabilità e Mutabilità*, in « Studi Economico-giuridici », della R. Università di Cagliari, 1912; *Di una misura della disuguaglianza fra due gruppi di quantità e sua applicazione allo studio delle relazioni*

teri qualitativi in rettilinei, ciclici e sconnessi: 2°) si pose una definizione di « misura » non per le modalità di un carattere qualitativo, ma per le « diversità » fra loro esistenti. Peraltro, alle serie in parola, non si erano finora estesi i concetti delle diverse medie usualmente definite per le serie dipendenti da un carattere quantitativo, per quanto fosse già stata affermata la possibilità di una tale estensione (1).

Il lavoro in esame è appunto dedicato, principalmente, a tale problema, la cui risoluzione è resa possibile dall'applicazione dei due concetti sopra accennati e dal solito principio di conservazione delle leggi formali. Sorvolando sul caso più semplice delle serie dipendenti da un carattere qualitativo rettilineo, le quali si investigano in modo analogo alle seriazioni dipendenti da un carattere quantitativo, e sorvolando anche su quella particolare media che è la moda o norma, di cui si può conservare la consueta definizione, restavano da definire la media aritmetica e la mediana per le serie cicliche e per quelle sconnesse. È, infatti, evidente che le consuete definizioni di media aritmetica e di mediana, le quali presuppongono l'esistenza di due modalità estreme fra cui queste medie debbono essere comprese, non sono applicabili né alle serie cicliche, né alle sconnesse. Ma se alle accennate definizioni altre se ne sostituiscono, costituite dal verificarsi delle proprietà che caratterizzano la media aritmetica o la mediana quando le definizioni tradizionali non cadono in difetto, allora non soltanto risulta la possibilità di stabilire i concetti di media aritmetica e di mediana per le dette serie, ma altresì quella di ottenere diverse estensioni (talora coincidenti) in corrispondenza alle diverse proprietà formali assunte in surrogazione della definizione consueta. È da notarsi che a ciascuna definizione corrispondono generalmente parecchie modalità medie. Il concetto di media aritmetica può anche estendersi alle serie cicliche e alle serie sconnesse, in base al suo significato meccanico. È poi facile intendere come le estensioni dei concetti di media aritmetica e di mediana alle serie cicliche e sconnesse diano la possibilità di definire per tali serie i diversi indici di mutabilità che dipendono da quelle medie. Infine, considerando particolarmente fra le serie statistiche dipendenti da più caratteri quantitativi e qualitativi, quelle che sono

statistiche. - Atti del R. Istituto Ven. di S. L. A. », 1914-15; *Di una estensione del concetto di scostamento medio, ecc.* - Atti del R. Istituto Ven. di S. L. A. », 1917-18; ecc.

(1) C. GINI, *The contribution of Italy to modern Statistical Methods.* - Journ. of the Roy. Stat. Soc. », 1926.

funzioni di due soli caratteri, è possibile, sempre con l'applicazione del principio di conservazione delle leggi formali, estendere ad esse i diversi concetti di media e i diversi indici di mutabilità; nonché dare un concetto esatto di « centro mediano » della popolazione, correggendo quello che viene da alcuni adottato e applicato. (Cfr. vol. I, pag. 32 del *Fourth. Census of the United States*, 1920).

C. A. BJERNES: *Niels Henrik Abel: eine Schilderung seines Lebens und seiner Arbeit*. Berlin, J. Springer, 1930, pagg. V-136.

Questa nuova edizione dell'opera pubblicata verso il 1870 da C. A. BJERNES sulla vita e l'opera di ABEL, è venuta alla luce, riveduta ed abbreviata per cura del figlio dell'Autore, prof. V. BJERNES dell'Università di Oslo, in occasione del centenario (6 Aprile 1929) della morte del Grande matematico norvegese, e l'editore Springer ne presenta, in elegante veste tipografica, la traduzione tedesca. Il libro, nella sua ridotta estensione, dà, in forma spigliata e con interessante e varia documentazione epistolare, notizie complete ed avvincenti sulla vita tanto breve, eppur tanto intensa del meraviglioso giovane: non essendo destinato ad un pubblico di matematici, esso non entra in particolari tecnici sui lavori dell'ABEL; ciò nonostante, il richiamo delle vicende, purtroppo non sempre liete, di quella breve e sì feconda esistenza, rende la lettura della pregevole biografia quanto mai attraente. (u)