S. P. Slouguinoff

Le determinant symbolique de BuhL

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.1, p. 6–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_6_0>

Le déterminant symbolique de Buhl.

par S. P. SLOUGUINOFF (à Perm).

Le mathématicien contemporain français BUHL a publié plusieurs ouvrages intéressants dans lesquels un certain déterminant, nommé par nous *le déterminant symbolique de Buhl,* joue le rôle essentiel.

Strictement parlant, les déterminants du type BUHL se rencontrent déjà dans le calcul vectoriel, mais dans le cas actuel ce qui présente surtout de l'intérêt, ce n'est pas la valeur formelle du déterminant de BUHL, mais la portée du contenu que BUHL a sû y mettre.

Au moyen de sa méthode et de deux formules d'intégrales curvilignes, BUHL déduit la plupart des formules importantes de l'analyse classique ainsi que celles de la mécanique et de la physique mathématique.

Il paraît que l'idée de cette méthode a été empruntée par BUHL au mathématicien italien VITO VOLTERRA. À la page 48 de sa monographie : *Leçons sur les fonctions de lignes*, on lit :

« Ceci montre bien l'intérêt de la formule de STOKES. On peut même aller plus loin : on peut faire dépendre toute la theorie de LIE-MAYER de la formule de STOKES. Cette théorie s'étendra donc aux fonctions de ligne ». Cette idée remarquable de VOLTERRA a été brillament confirmée dans les ouvrages récents de BUHL.

Le but du présent article est de trouver les transformations du déterminant de BUHL, ce que nous considérons comme très important, vû le rôle de cet déterminant dans la construction des formules de BUHL.

La formule fondamentale et la formule de Green-Riemann. — Le déterminant de Buhl est la partie intégrante des formules élémentaires de Stokes.

Ces formules s'obtiennent au moyen de transformations linéaires des variables qui font partie de l'intégrale curviligne

$$\int_c X dY = \iint_s dX dY, \tag{I}$$

où c est contour étendue à l'aire simplement connexe s dans le plan YOX. La formule (I) est appelée par Buhl *la formule fondamentale.*

Admettons maintenant que

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \tag{1}$$

alors le contour c se remplacera par le contour C et l'aire s par l'aire S.

Comme résultat de ces transformations, la formule (I) prendra la forme suivante:

$$\iint_S \begin{vmatrix} X_x' X_y' \\ Y_x' Y_y' \end{vmatrix} dxdy = \int_C X(Y_x'dx + Y_y'dy). \tag{2}$$

En posant $XY_x' = P$, $XY_y' = Q$, on a la formule de Green-Riemann:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_C (Pdx + Qdy). \tag{3}$$

Ici les fonctions P et Q doivent satisfaire aux conditions générales permettant l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$.

La formule (3) peut être présentée par la forme symbolique suivante:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ P \ Q \end{vmatrix} dxdy = \int_C (Pdx + Qdy). \tag{3'}$$

Le déterminant qui se trouve dans la partie gauche de l'équation (3') est justement le « déterminant symbolique » de Buhl.

On peut aussi écrire la formule (3') de la manière suivante:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \\ P_1 \ P_2 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = \int_C P_i dx_i, \tag{3''}$$

où $P_i dx_i$ est le symbole de BUHL, lequel a la signification suivante:

$$P_i dx_i = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots + P_n dx_n .$$

Le déterminant symbolique de BUHL peut être appliqué avec succès au théorème célèbre de CAUCHY, qui sert de point de départ dans la theorie des fonctions analytiques.

Formule de Stokes. — Transformons la formule fondamentale (I) à l'aide des relations

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \tag{4}$$

que l'on peut regarder comme la transformation de deux variables. si z à son tour est une certaine fonction de deux variables,

$$z = f(x, y). \tag{5}$$

L'équation (5) exprime une surface.

On peut se figurer que tous les points X, Y de l'aire s correspondent à tous les points de la partie de la surface S, limitée par le contour fermé C.

Dans ces circonstances la formule (I) prendra la forme:

$$\iint_S \begin{vmatrix} X_x' + pX_z' & X_y' + qX_z' \\ Y_x' + pY_z' & Y_y' + qY_z' \end{vmatrix} dxdy = \int_C X(Y_x'dx + Y_y'dy + Y_z'dz). \tag{6}$$

L'égalité (6) peut être remplacée par son équivalente:

$$\iint_S \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ X_x' & X_y' & X_z' \\ Y_x' & Y_y' & Y_z' \end{vmatrix} dxdy = \int_C X(Y_x'dx + Y_y'dy + Y_zdz'). \tag{7}$$

Dans les formules (6) et (7) les quantités p et q sont les paramètres connus de MONGE.

Il est facile de démontrer comment se transforment l'un dans l'autre les déterminants qui se trouvent dans les formules (6) et (7).

On a en effet

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 - ax_3 & x_2 - bx_3 & x_3 \\ y_1 - ay_3 & y_2 - by_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - ax_3 & x_2 - bx_3 \\ y_1 - ay_3 & y_2 - by_3 \end{vmatrix}. \tag{a}$$

Supposant que dans l'équation (a) les quantités

$$a,\ b,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3$$

sont respectivement égales à

$$-p,\ -q,\ X_x',\ X_y',\ X_z',\ Y_x',\ Y_y',\ Y_z',$$

nous aurons:

$$\begin{vmatrix} X_x'+pX_z' & X_y'+qX_z' \\ Y_x'+pY_z' & Y_y'+qY_z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ X_x' & X_y' & X_z' \\ Y_x' & Y_y' & Y_z' \end{vmatrix}.$$

Cherchons à présent de donner au déterminant de la formule (7) une forme symbolique.

On a

$$\text{(b)}\quad \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ X_x' & X_y' & X_z' \\ Y_x' & Y_y' & Y_z' \end{vmatrix} = -p\begin{vmatrix} X_y' & X_z' \\ Y_y' & Y_z' \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} X_x' & X_z' \\ Y_x' & Y_z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x' & X_y' \\ Y_x' & Y_y' \end{vmatrix}.$$

Mais il est facile de voir que

$$-p\begin{vmatrix} X_y' & X_z' \\ Y_y' & Y_z' \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} X_x' & X_z' \\ Y_x' & Y_z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x' & X_y' \\ Y_x' & Y_y' \end{vmatrix} =$$

$$\text{(c)}\quad = -p\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

si nous désignons XY_x', XY_y' et XY_z' respectivement par P, Q et R.

En vertu de l'égalité (c) la formule (7) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\text{(8)}\quad \iint_S \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dxdy = \int_C (Pdx + Qdy + Rdz).$$

La formule (8) est précisément *la formule de Stokes*, représentée en forme symbolique.

Admettons que a, b et c sont les cosinus des angles de la normale pour l'élément $d\sigma$ de la surface S, alors nous avons

$$\text{(9)}\qquad -pdxdy = ad\sigma, \quad -qdxdy = bd\sigma, \quad dxdy = cd\sigma.$$

La formule de STOKES dans ce cas s'écrira ainsi:

$$(10) \qquad \iint_S \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = \int_C (Pdx + Qdy + Rdz).$$

Vu les relations (3″), on peut aussi donner à la formule (10) de STOKES la forme suivante:

$$(10') \qquad \iint_S \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} d\sigma = \int_C P_i dx_i .$$

La formule de STOKES a pour but de ramener l'intégrale de surface à l'intégrale curviligne, prise le long du contour qui limite cette surface.

La partie considerée de la surface S et le contour C sont pris dans une direction positive.

La formule de STOKES s'applique de même sans modification au côté intérieur de la surface, puisque, dans ce cas, bien que les cosinus a, b et c prennent des signes inverses, la direction de mouvement par le contour C se modifiera aussi dans un sens opposé.

(Comme direction d'orientation nous prenons la direction première pour le côté extérieur de la surface S).

Dans son ouvrage « Formules Stokiennes » BUHL appelle la formule (10′) *formule de Stokes ordinaire.*

Dans la monographie sus mentionnée, VITO VOLTERRA cite la formule générale de STOKES qui a lieu dans l'espace à n dimensions.

Extension de la formule de Stokes. — Les raisonnements précédents, se rapportant au cas de deux ou trois variables, peuvent être étendus au cas d'un plus grand nombre de variables, d'où suit naturellement l'extension de la formule de STOKES.

Dans le but d'un plus simple raisonnement, nous bornons l'article présent au cas de 4 variables, car le développement de la formule fondamentale dans le cas d'un nombre plus grand devient entièrement clair.

Transformons la formule (I) à l'aide des relations

$$X = X(x,\ y,\ p,\ q),\quad Y = Y(x,\ y,\ p,\ q), \tag{d}$$

où les paramètres de MONGE p et q sont des fonctions de x et y. Après la transformation, la formule (I) prendra la forme suivante

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \begin{vmatrix} X_x' + rX_p' + sX_q' & X_y' + sX_p' + tX_q' \\ Y_x' + rY_p' + sY_q' & Y_y' + sY_p' + tY_q' \end{vmatrix} dxdy = \\ = \int\limits_C X(Y_x'dx + Y_y'dy + Y_p'dp + Y_q'dq)\end{aligned} \tag{11}$$

où p, q, r, s et t sont les paramétres connus de MONGE.

L'égalité (11) peut être remplacée par son equivalente

$$\iint\limits_S \Delta dxdy = \int\limits_C (Pdx + Qdy + Sdp + Tdq), \tag{12}$$

en supposant que

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ X_x' & X_y' & X_p' & X_q' \\ Y_x' & Y_y' & Y_p' & Y_q' \end{vmatrix} \text{ et } XY_x',\ XY_y',\ XY_p',\ XY_q' \tag{e}$$

soient respectivement égales à P, Q, S et T.

Prouvons maintenant que les déterminants inclus dans les formules (11) et (12) se transforment l'un dans l'autre.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ e-ag & f-bg & g & h \\ i-ak & j-bk & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ e-ag & f-bg & h \\ i-ak & j-bk & l \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e-ag-ch & f-bg-dh & h \\ i-ak-ct & j-bk-dl & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e-ag-ch & f-bg-dh \\ i-ak-cl & j-bk-dl \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{f}$$

En considérant les quantités de l'égalité (f)

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l$$

comme respectivement égales à

$$-r,\ -s,\ -s,\ -t,\ X_x',\ X_y',\ X_p',\ X_q',\ Y_x',\ Y_y',\ Y_p',\ Y_q',$$

nous obtiendrons que

$$(g)\quad \begin{vmatrix} X_x'+rX_p'+sX_q' & X_y'+sX_p'+tX_q' \\ Y_x'+rY_p'+sY_q' & Y_y'+sY_p'+tY_q' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r & -s & 1 & 0 \\ -s & -t & 0 & 1 \\ X_x' & X_y' & X_p' & X_q' \\ Y_x' & Y_y' & Y_p' & Y_q' \end{vmatrix} = \Delta.$$

Donnons maintenant au déterminant Δ une forme symbolique. On a

$$\Delta = r\begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ X_y' & X_p' & X_q' \\ Y_y' & Y_p' & Y_q' \end{vmatrix} - s\begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ X_x' & X_p' & X_q' \\ Y_x' & Y_p' & Y_q' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & t & -1 \\ X_x' & X_y' & X_q' \\ Y_x' & Y_y' & Y_q' \end{vmatrix} =$$

$$(h)\quad = r\begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ Q & S & T \end{vmatrix} - s\begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & S & T \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & T \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & S & T \end{vmatrix}.$$

Conformément aux notations de BUHL. on peut aussi donner à la formule (12) la forme suivante

$$(12')\quad \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = \int_C P_i dx_i .$$

Ici nous avons désigné

$$x,\ y,\ p,\ q,\ P,\ Q,\ S \text{ et } T$$

par

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3 \text{ et } P_4 .$$

Quant aux paramétres r, s et t, il est evident que $r = \frac{\partial p}{\partial x}$, $s = \frac{\partial p}{\partial y}$, $s = \frac{\partial q}{\partial x}$, $t = \frac{\partial q}{\partial y}$ seront respectivement remplacés par les quantités $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x_4}{\partial x_2}$.